Краткие сообщения по физике № 5 1982

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ИЗОТРОПНОЙ ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ

А. М. Игнатов

УДК 533.95

Получено общее уравнение, описывающее потенциальную поверхностную волну на поверхности раздела двух сред произвольной формы. Показано, что на изломах поверхности могут существовать локализованные (приреберные) волны, и найден их спектр.

I. Известно, что на границе раздела двух диспергирующих сред могут существовать поверхностные волны - колебания, распространяющиеся вдоль поверхности раздела и затухающие в глубине обеих сред. Однако поверхностные электромагнитные волны детально исследованы только в случае плоской и цилиндрической поверхностей раздела. Вопрос о существовании и дисперсионных характеристиках подобных волн на других более сложных поверхностях остается открытым. Ниже будет получено уравнение для потенциальной ($\vec{E} = -\nabla\Phi$, $\vec{B} = 0$) волны на произвольной поверхности S, разделяющей изотропную среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ (область V_1) и вакуум (область V_2).

Если поверхность S имеет какие-либо дефекты (например, изломы) то, в принципе, возможны поверхностные волны, локализованные на этих дефектах. В качестве примера использования общего уравнения для потенциальных поверхностных волн рассмотрим приреберную волну, т.е. волну, локализованную вблизи ребра на поверхности и распространяющуюся вдоль него, и исследуем ее дисперсию.

2. Пусть потенциал волны $\Phi(\vec{r},t) = e^{-i\omega t}\Phi(\vec{r})$ и $\Phi(\vec{r}) = \Phi_1(\vec{r})$ в области V_1 и $\Phi(\vec{r}) = \Phi_2(\vec{r})$ в области V_2. Функ-

ции $\Phi_{1,2}$ удовлетворяют уравнению Лапласа в областях $V_{1,2}$, т.е. $\Delta\Phi_{1,2} = 0$, и граничные условия на поверхности S получаются из требования непрерывности тангенциальных компонент электрического поля и нормальной компоненты электрической индукции: при $\vec{r} \in S$.

$$\Phi_1(\vec{r}) = \Phi_2(\vec{r}), \quad \varepsilon \frac{d\Phi_1}{dn} = \frac{d\Phi_2}{dn}, \quad |\Phi_{1,2}|_{r\to\infty} < \infty . \qquad (I)$$

В дальнейшем за положительное направление нормали $\vec{n}$ мы принимаем направление из V_1 в V_2. Поверхность S может быть параметризована при помощи двумерного вектора $\vec{\xi}$: $\vec{r} = \vec{R}(\vec{\xi})$. Известно /I/, что функция

$$F_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int dS(\vec{\xi}) \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}(\vec{\xi})|} \frac{\partial\Phi_1(\vec{\xi})}{\partial n} - \Phi(\vec{\xi}) \frac{\vec{n}(\vec{\xi})(\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} \right], \qquad (2)$$

где $\Phi(\vec{\xi}) = \Phi_{1,2}(\vec{R}(\vec{\xi}))$, $\partial\Phi_1(\vec{\xi})/\partial n = \partial\Phi_1(\vec{R}(\vec{\xi}))/\partial n$, в области V_1 равна $\Phi(\vec{r})$, а на поверхности S функция $F_1(\vec{r}) = (1/2)\Phi(\vec{\xi})$. Аналогично можно связать $\Phi(\vec{\xi})$, $\partial\Phi_2/\partial n$ и $\Phi_2(\vec{r})$ в области V_2. Таким образом, мы получаем систему интегральных уравнений для функции $\Phi(\vec{\xi})$ и $\partial\Phi_{1,2}(\vec{\xi})/\partial n$

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{\xi}) &= \int dS(\vec{\xi}') \left[Q(\vec{\xi}, \vec{\xi}') \frac{\partial\Phi_1(\vec{\xi}')}{\partial n} - K(\vec{\xi}, \vec{\xi}')\Phi(\vec{\xi}') \right], \\ \Phi(\vec{\xi}) &= \int dS(\vec{\xi}') \left[- Q(\vec{\xi}, \vec{\xi}') \frac{\partial\Phi_2(\vec{\xi}')}{\partial n} + K(\vec{\xi}, \vec{\xi}')\Phi(\vec{\xi}') \right], \end{aligned} \qquad (3)$$

где

$$\begin{aligned} Q(\vec{\xi}, \vec{\xi}') &= \frac{1}{2\pi} |\vec{R}(\vec{\xi}) - \vec{R}(\vec{\xi}')|^{-1}, \\ K(\vec{\xi}, \vec{\xi}') &= \frac{1}{2\pi} \vec{n}(\vec{\xi}')(\vec{R}(\vec{\xi}) - \vec{R}(\vec{\xi}'))|\vec{R}(\vec{\xi}) - \vec{R}(\vec{\xi}')|^{-3}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Используя граничное условие (I), легко получить интегральное уравнение для функции $\Phi(\vec{\xi})$

$$\lambda\Phi(\vec{\xi}) = \int dS(\vec{\xi}')K(\vec{\xi},\vec{\xi}')\Phi(\vec{\xi}'), \qquad (5)$$

где $\lambda = (1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)$. Нормальная производная потенциала при этом связана с $\Phi(\vec{\xi})$ соотношением

$$\Phi(\vec{\xi}) = (1/2)(1-\varepsilon)\int dS(\vec{\xi}')Q(\vec{\xi},\vec{\xi}')\,\frac{\partial\Phi_1(\vec{\xi}')}{\partial n}. \qquad (6)$$

Собственные значения λ уравнения (5) определяются только геометрией поверхности и при известной функции $\varepsilon(\omega)$ позволяют найти спектр собственных частот поверхностных волн. Зная собственные функции уравнения (5), можно при помощи соотношений (2) и (6) восстановить структуру поля волны во всем пространстве.

3. Если поверхность S однородна вдоль оси z, то, представив $\Phi(\vec{\xi})$ в виде $e^{-ikz}\Phi(\tau)$, легко убедиться, что $\Phi(\tau)$ удовлетворяет уравнению типа (5), но с ядром:

$$K(\tau,\tau') = \frac{k}{\pi}\,\frac{\vec{n}(\tau')(\vec{R}(\tau)-\vec{R}(\tau'))}{|\vec{R}(\tau)-\vec{R}(\tau')|}\,K_1(k|\vec{R}(\tau)-\vec{R}(\tau')|), \qquad (7)$$

где $K_\nu(z)$ – функция Макдональда, $\vec{R}(\tau)$ лежит в плоскости xy и интегрирование в (5) ведется по сечению поверхности S плоскостью xy.

Заметим прежде всего, что из уравнения (5) с ядром (7) следуют известные решения для поверхностных волн на плоскости и цилиндре. Если S – плоская поверхность, т.е. $R_x(\tau) = 0$, $R_y(\tau) = \tau$, то ядро $K(\tau,\tau') = 0$ и, следовательно, единственным собственным значением будет $\lambda = 0$ (или $\varepsilon(\omega) = -1$).

Для цилиндрической поверхности $R_x(\tau) = R\cos\tau$, $R_y(\tau) = R\sin\tau$ и уравнение (5) принимает вид

$$\lambda\Phi(\tau) = \frac{1}{2\pi}\,R\,\frac{d}{dR}\int_{-\pi}^{\pi} d\tau' K_0\left(2kR\left|\sin\frac{\tau-\tau'}{2}\right|\right)\Phi(\tau'). \qquad (8)$$

Очевидно, что собственными функциями уравнения (8) будут $\Phi_m(\tau) = e^{im\tau}$ где m – целое число, а собственные значения определяются формулой

$$\lambda_m = \frac{1}{2\pi} R \frac{d}{dR} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau e^{im\tau} K_0\left(2kR\left|\sin\frac{\tau}{2}\right|\right) = R\frac{d}{dR}\left[I_m(kR)K_m(kR)\right], \quad (9)$$

что, как легко видеть, приводит к известному закону дисперсии для поверхностных волн на цилиндре /2/.

4. Если поверхность S – кусочно-гладкая, то, как уже отмечалось, возможны решения уравнения (5)[ж)], локализованные в окрестности ребер. В качестве иллюстрации рассмотрим поверхность в виде ребра, задаваемую уравнениями $R_x(\tau) = |\tau|\cos(\alpha/2)$, $R_y(\tau) = \tau\sin(\alpha/2)$. Если $\psi_1(\tau) = \Phi(\tau)$ при $\tau > 0$, а $\psi_2(\tau) = \Phi(-\tau)$ при $\tau < 0$, то уравнение (5) принимает вид

$$\lambda\psi_1(\tau) = -\tau\int_0^\infty d\tau' F(\tau,\tau')\psi_2(\tau'),$$

$$\lambda\psi_2(\tau) = -\tau\int_0^\infty d\tau' F(\tau,\tau')\psi_1(\tau'), \quad (10)$$

где

$$F(\tau,\tau') = \frac{k}{\pi}\sin\alpha\,\frac{K_1\left(k\sqrt{\tau^2+\tau'^2-2\tau\tau'\cos\alpha}\right)}{\sqrt{\tau^2+\tau'^2-2\tau\tau'\cos\alpha}}. \quad (11)$$

Мы не будем подробно рассматривать решение уравнений (10), отметим лишь, что они могут быть решены при помощи интегрального преобразования Канторовича – Лебедева (см., напр., /4/). Спектр собственных значений системы оказывается непрерывным с волновым числом β

$$\lambda_{1,2} = \pm\,\mathrm{sh}(\beta(\pi-\alpha))/\mathrm{sh}(\beta\pi), \quad -\infty < \beta < \infty,$$

собственные функции

$$\psi_{1,2}(\tau) \backsim K_{i\beta}(k\tau).$$

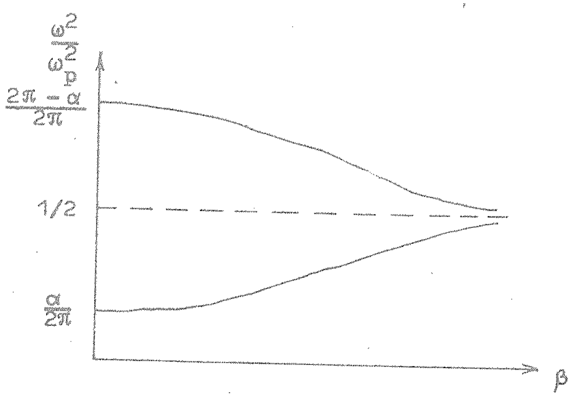
[ж)] Асимптотические решения уравнения Гельмгольца подобного типа рассматривались в работе /3/.

Для $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ из (II) получаем две ветви приреберных плазменных волн

$$\omega_1^2(\beta) = \omega_p^2 \mathrm{sh}(\beta\alpha/2)\mathrm{ch}(\beta(\pi - \alpha/2))/\mathrm{sh}(\beta\pi),$$

$$\omega_2^2(\beta) = \omega_p^2 \mathrm{ch}(\beta\alpha/2)\mathrm{sh}(\beta(\pi - \alpha/2))/\mathrm{sh}(\beta\pi), \tag{I2}$$

изображенные на рис. I.



Р и с. I. Зависимость частоты приреберных волн от параметра β при $\alpha < \pi$

Пространственную структуру поля можно получить из формул (6) и (7). В полярных координатах (ρ,Θ) ($|\Theta|<\pi$, поверхность S: $\Theta = \pm\alpha/2$) имеем для ветви $\omega = \omega_1(\beta)$

$$\Phi(\rho,\Theta) = K_{i\beta}(k\rho)\begin{cases} C_1\mathrm{ch}(\beta\Theta), & |\Theta| < \alpha/2, \\ C_2\mathrm{ch}(\beta(\pi - |\Theta|)), & |\Theta| > \alpha/2, \end{cases} \tag{I3}$$

а для ветви $\omega = \omega_2(\beta)$

$$\Phi(\rho,\Theta) = K_{i\beta}(k\rho)\begin{cases} C_1\mathrm{sh}(\beta\Theta), & |\Theta| < \alpha/2, \\ C_2\mathrm{sh}(\beta(\pi - |\Theta|)), & |\Theta| > \alpha/2. \end{cases} \tag{I4}$$

Оба решения (I3) и (I4) экспоненциально убывают при $\rho \to \infty$ и ограничены при $\rho \to 0$. Как легко убедиться, при $\alpha = \pi$ (плоская поверхность S) обе ветви спектра (I2) стремятся к $\omega_p^2/2$.

Аналогично можно рассмотреть случай аксиально-симметричной поверхности, что позволяет решить задачи о колебаниях на острие конуса и ряд других. Уравнение типа (5) позволяет также строить теорию возмущений по малым отклонениям от плоской или цилиндрической поверхностей. Заметим также, что хотя аналитическое решение уравнения (5) в той или иной геометрии может быть затруднительным, численный анализ (5) существенно проще, чем решение трехмерных уравнений поля.

Автор благодарит А. А. Рухадзе за полезное обсуждение вопросов, рассмотренных в статье.

Поступила в редакцию
24 февраля 1982 г.

Литература

I. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, изд-во иностр. лит., М., 1958 г.
2. А. Р. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, Основы электродинамики плазмы "Высшая школа", М., 1978 г., § 48.
3. А. П. Киселев, Письма в ЖТФ, 7, 276 (I98I).
4. Г. А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории электрических м магнитных явлений, изд-во АН СССР, Ленинград, 1948 г., гл. I8.