Краткие сообщения по физике № 9 1982.

ЭФФЕКТИВНЫЙ ЛАГРАНЖИАН ХРОМОДИНАМИКИ, ЗАВИСЯЩИЙ ОТ ДВУХ ИНВАРИАНТОВ

И. В. Андреев

УДК 539.12.01

Предложен эффективный лагранжиан для хромодинамики, зависящий от двух простейших инвариантов и удовлетворяющий уравнению для следа тензора энергии-импульса.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы рассмотреть возможную форму эффективного лагранжиана хромодинамики L, который учитывал бы квантовые эффекты и зависел от двух инвариантов

$$F = F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$$
$$G = {}^*F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^a_{\mu\nu} F^a_{\rho\sigma}. \tag{1}$$

Лагранжиан L может зависеть лишь от квадрата псевдоскалярной величины G.

Основное свойство, которое будет требоваться от лагранжиана L(F,G), состоит в том, чтобы он приводил к тензору энергии-импульса $T_{\mu\nu}$, удовлетворяющему нужному соотношению для следа

$$T^\mu_\mu = \frac{\beta}{2g^3} F, \tag{2}$$

как это требовалось в работе /1/ для случая L, зависящего от одного инварианта F. Здесь $\beta(g)$ – функция Гелл-Манна–Лоу, g – текущая константа связи, для которой в качестве шкалы могут использоваться размерные инварианты F и G, и затравочная константа связи включена в определение калибровочного поля A^a_μ, так что ковариантная производная есть $\nabla_\mu q = (\partial_\mu + iA^a_\mu \lambda^a/2)q$.

Тензор энергии-импульса определяется через лагранжиан вариацией метрики $g^{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = 2\,\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}L. \tag{3}$$

Записывая в криволинейных координатах

$$G \to \frac{1}{\sqrt{-g}}\,G, \quad g = \det\|g_{\mu\nu}\|,$$

получаем

$$\frac{\partial G}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}G, \quad \frac{\partial F}{\partial g^{\mu\nu}} = 2F^a_{\mu\rho}F^{a\rho}_{\nu}, \tag{4}$$

так что

$$T_{\mu\nu} = 4\,\frac{\partial L}{\partial F}\,F^a_{\mu\rho}F^{a\rho}_{\nu} + g_{\mu\nu}\left(G\,\frac{\partial L}{\partial G} - L\right), \tag{5а}$$

$$T^\mu_\mu = 4\left(F\,\frac{\partial L}{\partial F} + G\,\frac{\partial L}{\partial G} - L\right) = \frac{\beta}{2g^3}\,F. \tag{5б}$$

Соотношение (5б) является уравнением на $L = Fl$.

$$\frac{\partial l}{\partial \ln F} + \frac{\partial l}{\partial \ln G} = \frac{\beta(g)}{2g^3(F,G)}. \tag{6}$$

При наиболее естественном выборе в качестве шкалы для заряда величины $R = (F^2 + G^2)^{1/2}$, т.е. при

$$g = g(R), \quad \frac{\beta}{2g^3} = -\frac{1}{4}\,\frac{d}{d\ln R}\left(\frac{1}{g^2(R)}\right) \tag{7}$$

уравнение (6) имеет решение

$$L = Fl = -\frac{1}{4} F \left(\frac{1}{g^2(R)} + C \right), \quad C = \text{const}, \tag{8}$$

аналогичное решению в /I/. Теперь однако можно добавить к l произвольную функцию от отношения G^2/F^2. Этим произволом при необходимости можно воспользоваться для модификации вида $T_{\mu\nu}$ и уравнений движения.

Уравнения движения могут быть получены из L стандартным способом - вариацией по калибровочному полю A^a_μ. В результате получим:

$$\nabla_\nu \left(4 \frac{\partial L}{\partial F} F^{a\mu\nu} + 4 \frac{\partial L}{\partial G} {}^*F^{a\mu\nu}\right) = J^{a\mu}, \tag{9}$$

где $J^{a\mu}$ - источник. В отличие от случая одного инварианта F, где отличие уравнений движения от исходных классических уравнений состояло лишь в появлении не равной единице эффективной диэлектрической проницаемости $\varkappa = -4\partial L/\partial F$, здесь появляется дополнительное слагаемое, содержащее псевдотензор ${}^*F^{a\mu\nu}(x)$.

Для лагранжиана (8) имеем

$$\begin{aligned} \varkappa &= \frac{1}{g^2} - \frac{\beta}{2g^3} \frac{F^2}{F^2 + G^2} + C, \\ \chi &= 4 \frac{\partial L}{\partial G} = \frac{\beta}{2g^3} \frac{FG}{F^2 + G^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

По сравнению с исходными классическими уравнениями движения здесь происходит замена хромоэлектрических и магнитных напряженностей $\vec{E}^a$ и $\vec{B}^a$ на величины, являющиеся их комбинациями:

$$\begin{aligned} \vec{E}^a &\to \vec{D}^a = \varkappa \vec{E}^a - \chi \vec{B}^a, \\ \vec{B}^a &\to \vec{H}^a = \varkappa \vec{B}^a + \chi \vec{E}^a. \end{aligned} \tag{11}$$

Для абелевых конфигураций полей, когда не существенна некоммутативность векторов $A_\mu = \lambda^a A^a_\mu/2$ в цветовом пространстве, уравнения формально имеют вид уравнений электродинамики в материальной среде,

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = -J_0, \quad \partial_0\vec{D} - \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J},$$
$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0, \quad \partial_0 B + \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0. \tag{I2}$$

Однако уравнения (I0) – (I2) приводят, вообще говоря, к генерации магнитных полей статическими источниками. Решения уравнений (I0) – (I2) имеют сложный вид и будут рассмотрены в дальнейшем. Формально, из-за слабого спадания полей на больших расстояниях, они соответствуют удержанию тяжелых кварков.

Поступила в редакцию
26 апреля I982 г.

Л и т е р а т у р а

1. H. Pagels and E. Tomboulis, Nucl. Phys., B143, 485 (1978).