

О СТЕПЕНИ БЛИЗОСТИ МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫХ  
ПРОФИЛЕЙ К МОДЕЛЬНЫМ

А. А. Гальченко, И. Ф. Малов, Л. Ф. Могильницкая,  
В. А. Фролов

УДК 520.874

С помощью модельных расчетов показано, что сохранению основных информационных особенностей в минимально-фазовом профиле соответствуют условия: нормированное среднеквадратичное отклонение минимально-фазового профиля от модельного  $\sigma \leq 30\%$  и максимальное значение функции кросскорреляции между ними  $K_{\max} > 80\%$ .

В наших работах /1-3/ по минимально-фазовому восстановлению распределения яркости по источнику излучения с помощью преобразований Гильберта (ПГ) близость восстановленного профиля к модельному оценивалась качественно по наличию или отсутствию информационных деталей (число компонентов, их относительное положение и относительная интенсивность). Насколько нам известно, в работах других авторов количественное сравнение полученных с помощью ПГ профилей с модельными профилями или с профилями, восстановленными с помощью других методов, также не проводилось /4-6/.

В то же время представляет несомненный интерес введение количественных критериев, которые бы давали возможность оценить степень близости восстановленных профилей к модельным и сравнивать возможности различных методов. В настоящей работе делается попытка ввести такие критерии и применить их к модельным расчетам. Наиболее простым способом оценки степени близости двух кривых является вычисление нормированного среднего абсолютного  $\Delta$  или среднеквадратичного отклонения  $\sigma$  одной из них от другой на заданном интервале. В нашем случае

$$\Delta = \int_a^b |E_M(x) - E_m(x)| dx / \int_a^b E_M(x) dx, \quad (1)$$

$$\sigma^2 = \int_a^b [E_M(x) - E_m(x)]^2 dx / \int_a^b E_M^2(x) dx. \quad (2)$$

В (1) и (2)  $E_M(x)$  — модельный, а  $E_m(x)$  — минимально-фазовый профили. При вычислениях  $\Delta$  и  $\sigma$  учитывалось, что восстановленные профили, как правило, смещены относительно модельных. Поэтому сначала вычислялась функция кросскорреляции между  $E_M(x)$  и  $E_m(x)$ , затем  $E_m(x)$  смещалось по оси  $x$  в положение, при котором кросскорреляционная функция достигает максимального значения  $K_{\max}$ . В этом положении находились значения  $\Delta$  и  $\sigma$ . Само максимальное значение функции кросскорреляции является полезной оценкой, отражающей подобие минимально-фазового и модельного профилей и иллюстрирующей качественную близость между этими профилями.

В табл. 1 и на рис. 1-3 приведены типичные результаты для некоторых из просчитанных нами моделей. В качестве моделей были выбраны суммы гауссиан и ступенчатых функций. На рисунках сплошными линиями проведены  $E_M(x)$ , пунктир соответствует  $E_m(x)$ .

По этой методике мы также провели сравнение профилей, приведенных в работе /7/, где утверждается, что учет комплексных нулей Фурье-спектра может существенно исказить восстановленный профиль. В /7/ нет модельных профилей, поэтому для каждого из примеров I-IV работы /7/ минимально-фазовый профиль  $E_m$  сравнивался с профилями  $E_1 - E_3$ , полученными при некоторых предположениях о локализации комплексных нулей. Результаты этого сравнения, приведенные в табл. 2, показывают, какова максимальная степень искажения восстановленных профилей из-за неучета нулей.

Анализ проведенных вычислений позволяет сделать следующие выводы.

I. Приближенными количественными критериями хорошего восстановления <sup>\*</sup> могут служить условия:  $K_{\max} > 0,8$  и  $\Delta$  (или  $\sigma$ )  $\leq 0,3$

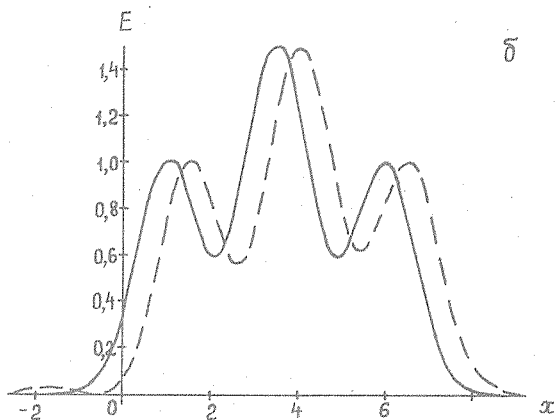
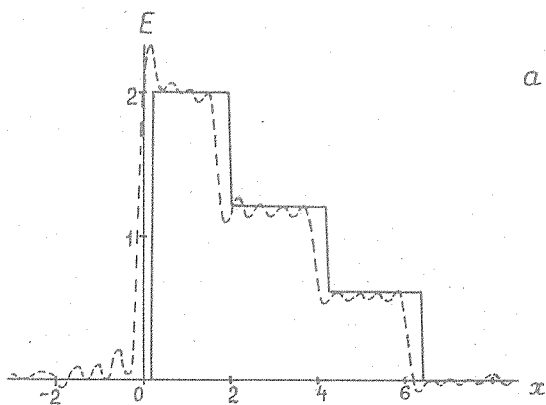
<sup>\*</sup> Мы считаем восстановление хорошим, если сохраняется число компонентов, их относительное положение и относительные интенсивности.

Таблица I

| № модели | $E_M(x)$   | $K_{\text{мах}}$ | $\Delta$      | $\sigma$ |                 |     |                 |      |      |      |
|----------|--|------------------|---------------|----------|-----------------|-----|-----------------|------|------|------|
| 1        | $\exp[-(x-3)^2] + \exp[-0,25(x-5,5)^2]$  | 1,00             | 0,02          | 0,02     |                 |     |                 |      |      |      |
| 2        | $\sum_{n=1}^{10} \exp[-10(x-0,6n)^2]$  | 0,94             | 0,08          | 0,09     |                 |     |                 |      |      |      |
| 3        | $0,8\exp[-(x+1,5)^2] + 1,5\exp(-1,6x^2) + 0,8\exp[-(x-1,5)^2]$   | 0,97             | 0,14          | 0,14     |                 |     |                 |      |      |      |
| 4        | $3,2\exp[-4(x+3)^2] + 0,8\exp[-(x+1,5)^2] + 1,5\exp(-1,6x^2) + 0,8\exp[-(x-1,5)^2]$  | 1,00             | 0,04          | 0,06     |                 |     |                 |      |      |      |
| 5        | <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>2</td> <td><math>0,2 &lt; x &lt; 2</math></td> </tr> <tr> <td>1,2</td> <td><math>2 &lt; x &lt; 4,2</math></td> </tr> <tr> <td>0,6</td> <td><math>4,2 &lt; x &lt; 6,4</math></td> </tr> </table>   | 2                | $0,2 < x < 2$ | 1,2      | $2 < x < 4,2$   | 0,6 | $4,2 < x < 6,4$ | 0,95 | 0,06 | 0,08 |
| 2        | $0,2 < x < 2$  |                  |               |          |                 |     |                 |      |      |      |
| 1,2      | $2 < x < 4,2$  |                  |               |          |                 |     |                 |      |      |      |
| 0,6      | $4,2 < x < 6,4$  |                  |               |          |                 |     |                 |      |      |      |
| 6        | <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>0,5</td> <td><math>0 &lt; x &lt; 2,5</math></td> </tr> <tr> <td>1,5</td> <td><math>2,5 &lt; x &lt; 3,5</math></td> </tr> <tr> <td>0,5</td> <td><math>3,5 &lt; x &lt; 6</math></td> </tr> </table> | 0,5              | $0 < x < 2,5$ | 1,5      | $2,5 < x < 3,5$ | 0,5 | $3,5 < x < 6$   | 0,59 | 0,48 | 0,48 |
| 0,5      | $0 < x < 2,5$  |                  |               |          |                 |     |                 |      |      |      |
| 1,5      | $2,5 < x < 3,5$  |                  |               |          |                 |     |                 |      |      |      |
| 0,5      | $3,5 < x < 6$  |                  |               |          |                 |     |                 |      |      |      |
| 7        | $\exp[-(x-1)^2] + 1,5\exp[-1,2(x-3,5)^2] + \exp[-(x-6)^2]$   | 1,00             | 0,04          | 0,04     |                 |     |                 |      |      |      |
| 8        | $3,2\exp[-5(x-0,5)^2] + 0,8\exp[-(x-3)^2] + 1,5\exp[-1,6(x-4,5)^2] + 0,8\exp[-(x-6)^2]$  | 0,97             | 0,16          | 0,16     |                 |     |                 |      |      |      |

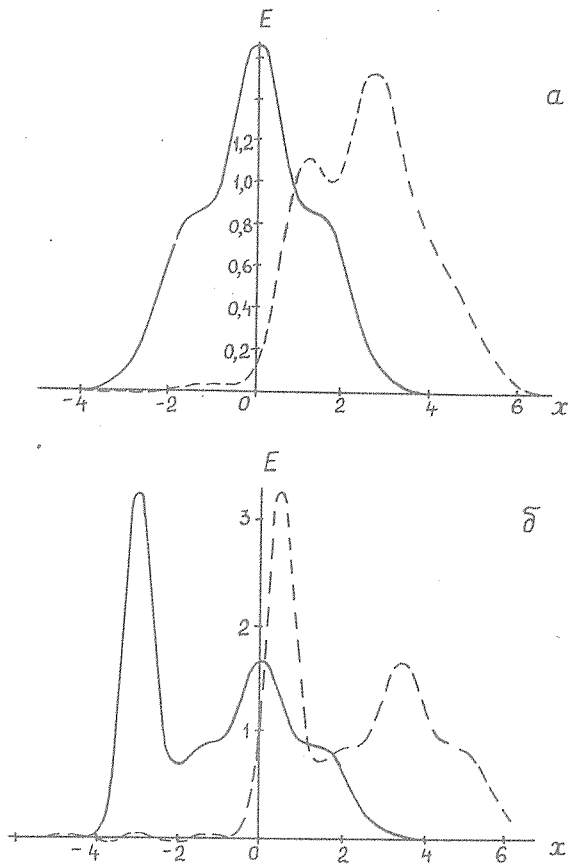
(рис. 1). Примером плохого восстановления может одужить шестая модель (рис. 2,  $K_{\text{мах}} = 0,59$ ,  $\sigma = 0,48$ ).

2. На модельных расчетах (см., например, рис. 3) показано, что введение в начало профиля дополнительного узкого компонента с интенсивностью, превышающей интенсивности других компонентов,



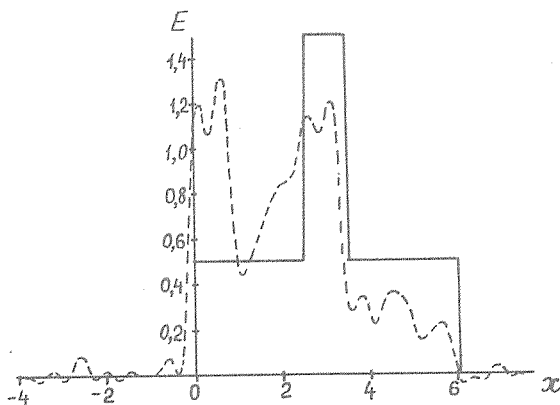
Р и с. I. Примеры хорошего восстановления профилей: модели 5 (а) и 7 (б)

позволяет существенно улучшить качество восстановления. Этот компонент (репер) аналогичен опорному лучу, используемому в голографии. Его применение обосновывается теоремой Руше /8/.



Р и с. 2. Пример улучшения восстановления с помощью репера:  
модели 3 (а) и 4 (б)

согласно которой число нулей аналитической функции  $F(\omega) = R(\omega) + G(\omega)$  в заданной области будет равно числу нулей функции  $R(\omega)$ , если на контуре  $|R(\omega)| > |G(\omega)|$ . Следовательно, выбрав в качестве опорной функции  $R(\omega)$ , у которой нет нулей в верхней полуплоскости ( $\omega_1 > 0$ ), получим суммарный спектр  $F(\omega)$ , также



Р и с. 3. Пример неудачного восстановления (модель 6)

Таблица 2

| Сравниваемые результаты | I    |      |      | II   |      |      | III  |      |      | IV   |      |      |
|-------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|                         | ш, 1 | ш, 2 | ш, 3 | ш, 1 | ш, 2 | ш, 3 | ш, 1 | ш, 2 | ш, 3 | ш, 1 | ш, 2 | ш, 3 |
| $K_{\text{шax}}$        | 0,86 | 0,74 | 0,91 | 0,90 | 0,85 | 0,95 | 0,92 | 0,90 | 0,98 | 0,97 | 0,94 | 0,94 |
| $\Delta$                | 0,36 | 0,50 | 0,29 | 0,20 | 0,21 | 0,12 | 0,27 | 0,31 | 0,14 | 0,19 | 0,24 | 0,23 |
| $\sigma$                | 0,35 | 0,46 | 0,27 | 0,25 | 0,26 | 0,14 | 0,26 | 0,30 | 0,15 | 0,17 | 0,23 | 0,23 |

не имеющих нулей в этой полуплоскости. В этом случае минимально-фазовое решение должно давать неискаженное распределение яркости. В настоящее время делаются попытки применять репер для приближенного восстановления радиояркости в реальных космических источниках по измеренным значениям  $|G(\omega)|$ .

3. Все приведенные в /7/ профили имеют пологий левый фронт. Как показали проведенные нами ранее модельные расчеты, в этом случае восстановление получается хуже, чем для профилей с крутым левым фронтом. Однако, как следует из табл. 2, и для та-

ких профилей восстановление в большинстве случаев может считаться хорошим.

Поступила в редакцию  
28 апреля 1982 г.

### Л и т е р а т у р а

1. И. Г. Косарев, И. Ф. Малов, В. А. Фролов, Препринт ФИАН № 90, М., 1980 г.
2. А. А. Гальченко, И. Ф. Малов и др., Краткие сообщения по физике ФИАН № 2, 8 (1982).
3. А. А. Гальченко, И. Ф. Малов и др., Краткие сообщения по физике ФИАН № 2, 24 (1982).
4. N. M. Muskenzweig, J. of Math. Phys., 8, 561 (1967).
5. G. Ross et al., Optik, 49, 71 (1977).
6. G. Ross et al., Optica Acta, 26, 229 (1979).
7. J. C. Dainty, M. A. Fiddy, A. H. Greenaway, Proc. IAU Colloq., N 79, 95 (1978).
8. Е. Титчмарш. Теория функций, "Наука", М., 1980 г.