Краткие сообщения по физике № 9 1982

О ВЛИЯНИИ СОБСТВЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПУЧКА НА БУДКЕРОВСКУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Н. И. Карбушев, С. Ю. Удовиченко

УДК 533.951

Исследована неустойчивость Будкера частично компенсированного релятивистского электронного пучка. Показано, что учет собственного азимутального магнитного поля тока пучка приводит к уменьшению инкремента нарастания колебаний.

Получение сильноточных электронных пучков является важной проблемой с точки зрения многих практических приложений. На этом пути основными препятствиями являются собственный объемный заряд пучков и их неустойчивость. Собственный заряд может быть устранен частичной или полной нейтрализацией ионным фоном. Как показал Лоусон /I/, в случае произвольной степени нейтрализации объемного заряда предельный ток пучка равен

$$I_Л = I_A \beta^2 \left(\frac{n_i}{n_b} + \beta^2 - 1 \right)^{-1}, \qquad (1)$$

где $I_A \approx 17\gamma\beta$ kA – альфвеновский ток, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ – релятивистский фактор электронов, $\beta = u/c$, u – скорость пучка, n_b и n_i – плотность электронов пучка и положительных однозарядных ионов фона. Из этой формулы следует, что предельный ток может быть сколь угодно большим, если выполняется равенство

$$n_i = n_b \gamma^{-2}. \qquad (2)$$

Вместе с тем наличие нейтрализующего фона ионов конечной массы приводит к возникновению неустойчивостей /2/, наиболее опасной среди которых является неустойчивость Будкера /3,4/, имеющая довольно большой инкремент. Ее возбуждение приводит к возникновению дефокусирующей силы и выбросу электронов на стенки волновода. Это явление наблюдаось экспериментально.

До сих пор при рассмотрении неустойчивости Будкера (см., например, /4/) пренебрегалось влиянием собственного азимутального магнитного тока пучка на развитие колебаний. В настоящей работе показано, что такое пренебрежение в отсутствие внешнего магнитного поля справедливо только при токе, намного меньшем альфвеновского. Учет собственного магнитного поля приводит к уменьшению инкремента даже при малом токе.

Исследуемая модель представляет собой пучок электронов с однородной плотностью, объемный заряд которого частично нейтрализован фоном ионов с плотностью, удовлетворяющей соотношению (2). Пучок ограничен в поперечном сечении волноводом радиуса R с металлическими стенками и имеет бесконечную длину. Собственное азимутальное магнитное поле внутри такого пучка при постоянной плотности тока линейно нарастает с радиусом

$$B_\varphi(r) = (2e)^{-1} m\beta\omega_b^2 r. \qquad (3)$$

Здесь $\omega_b^2 = 4\pi n_b e^2/m$, e и m – заряд и масса электрона. Возмущенные величины в самосогласованных уравнениях Максвелла, движения и непрерывности пропорциональны множителю $\exp(-i\omega t + ik_\parallel z + il\varphi)$, в котором ω и $k_\parallel$ частота колебаний и продольная составляющая волнового вектора, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – азимутальное волновое число.

В линейном приближении по возмущенным величинам получаем следующую систему уравнений для продольных составляющих электрического и магнитного полей E_z и B_z

$$\Delta_\perp E_z - \varkappa_1^2 E_z = -i \frac{1}{r} \frac{\omega_{b\parallel}^2 \omega_\varphi}{\varepsilon_\perp \omega_x^2 c} B_z, \qquad (4)$$

$$\Delta_\perp B_z - \varkappa^2 B_z = i \frac{1}{r} \frac{\omega_{b\parallel}^2 \omega_\varphi}{\omega_x^2 c} E_z,$$

где введены обозначения:

$$\varkappa_1^2 = \frac{1}{\varepsilon_\perp}\left[\varkappa^2\left(\varepsilon_+ - \frac{\omega_{b\parallel}^2}{\omega_x^2}\right) + \frac{2}{r}k_\parallel \frac{\omega_{b\parallel}^2}{\omega_x^2}\frac{\omega_\varphi}{\omega_x}\right], \quad \varkappa^2 = k_\parallel^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_+ + \frac{\omega_{b\perp}^2}{c^2},$$

$$\varepsilon_+ = 1 - \frac{\omega_i^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_\perp = \varepsilon_+ - \frac{\omega_{b\parallel}^2}{\omega_x^2}\left(1 + \gamma^2\beta^2\frac{\omega_i^2}{\omega^2}\right),$$

$$\omega_x = \omega - k_\parallel u, \quad \omega_{b\perp}^2 = \omega_b^2/\gamma, \quad \omega_{b\parallel}^2 = \omega_b^2/\gamma^3, \quad \omega_\varphi = eB_\varphi/mc,$$

$$\omega_i^2 = \frac{4\pi e^2 n_i}{M} = \frac{\omega_b^2}{\gamma^2}\frac{m}{M}, \quad \Delta_\perp = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr} - \frac{l^2}{r^2},$$

M – масса ионов. При получении системы (4) предполагалось, что ток пучка мал по сравнению с альфвеновским. Нетрудно заметить, что в пренебрежении собственным азимутальным магнитным полем пучка ($\omega_\varphi = 0$) возбуждаемая волна является волной E-типа. Инкремент нарастания колебаний при этом определяется соотношением /4/

$$\omega \approx \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\omega_{b\perp}\left(\frac{m}{2M}\right)^{1/3}\left(1 - \frac{\beta^2}{3}N_{ls}\right), \tag{5}$$

где $N_{ls} = \omega_{b\perp}^2 R^2/\mu_{ls}^2 u^2 = 4I/\mu_{ls}^2\beta^2 I_A \ll 1$, μ_{ls} – s-тый корень функции Бесселя l-го порядка: $J_l(\mu_{ls}) = 0$.

Учет собственного азимутального магнитного поля пучка приводит в зацеплению уравнений (4). Поэтому их решение следует искать в виде

$$E_z = \sum_{i=1}^{2} A_i J_l(k_i r), \quad B_z = \sum_{i=1}^{2} h_i A_i J_l(k_i r),$$

где

$$h_i = i\,\frac{l}{r}\frac{\omega_{b\parallel}^2}{\omega_x^2}\frac{\omega_\varphi}{c}(k_i^2 + \varkappa^2)^{-1},$$

а k_i являются решениями биквадратного уравнения

$$k_i^4 + k_i^2(\varkappa^2 + \varkappa_1^2) + \varkappa^2\varkappa_1^2 - \frac{1^2}{4}\frac{\omega_{b\parallel}^4}{\omega_x^4}\frac{\omega_\varphi^2}{c^2} = 0. \qquad (6)$$

Из условия равенства нулю тангенциальных составляющих электрического поля на стенках волновода следует уравнение для спектра колебаний

$$\frac{J_1(k_1R)}{J_1'(k_1R)} = \frac{h_1}{h_2}\frac{k_1}{k_2}\frac{J_1(k_2R)}{J_1'(k_2R)}, \qquad (7)$$

где J_1' – производная функции Бесселя. Обозначая

$$k_1^2 = \lambda_{1s}^2/R^2, \quad N_{1s} = \omega_{b\perp}^2 R^2/\lambda_{1s}^2 u^2,$$

из (6) получаем

$$k_2^2 = -\frac{\varkappa^2}{\varepsilon_\perp}\left(\varepsilon_\perp + \varepsilon_+ - \frac{\omega_{b\parallel}^2}{\omega_x^2}\right) + 2\frac{\omega_{b\parallel}^2}{\omega_x^2}\frac{\omega_\varphi}{\varepsilon_\perp \beta c r} - \frac{\lambda_{1s}^2}{R^2}.$$

Инкремент нарастания колебаний при этом определяется из уравнения

$$1 - \frac{\omega_{b\parallel}^2}{\omega_x^2} + \frac{\omega_{b\parallel}^2}{\omega_x^2}\frac{k_\parallel u}{\omega_x}\frac{\beta^2 N_{1s}}{1 + N_{1s}} - \frac{1^2}{4}\frac{\omega_{b\parallel}^4}{\omega_x^4}\frac{\beta^6 N_{1s}^2}{(1 + N_{1s})^2} =$$

$$= \frac{\omega_i^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{\omega_{b\parallel}^2}{\omega_x^2}\frac{\gamma^2\beta^2}{1 + N_{1s}}\right).$$

В первом приближении по $N_{1s} \ll 1$ отсюда находим

$$\omega \simeq \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,\omega_{b\perp}\left(\frac{m}{2M}\right)^{1/3}\left[1-\frac{\beta^2 N_{1s}}{3}\,(1+\beta^2)\right], \qquad (8)$$

$$k_2^2 R^2 \approx -\lambda_{1s}^2 N_{1s}\left(1+\frac{l^2}{4}\beta^4\right), \quad \frac{h_1}{h_2} \approx -\frac{l^2}{4}\beta^2 N_{1s}.$$

При токе пучка, много меньшем альфвеновского из уравнения (7) следует, что

$$\lambda_{1s} \approx \mu_{1s}\left(1-\frac{l^2}{4}\beta^2 N_{1s}\right) \approx \mu_{1s},$$

и зацепление уравнений (4) является слабым. Слабым является также влияние собственного азимутального магнитного поля пучка на развитие неустойчивости Будкера. Тем не менее, сравнение формул (5) и (8) показывает уменьшение инкремента вследствие собственного магнитного поля. Аналогичное сравнение можно провести и для радиальной дефокусирующей силы в аксиально-несимметричной волне этого типа.

При токе пучка, сравнимом с альфвеновским, уменьшение инкремента и радиальной дефокусирующей силы может оказаться существенным.

В заключение авторы выражают благодарность А. А. Рухадзе за обсуждение результатов работы.

Поступила в редакцию
6 мая 1982 г.

Литература

1. J. D. Lawson, J. Electr. and Control, 5, 146 (1958).
2. Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, УФН, 103, № 4, 609 (1971).
3. Г. И. Будкер, Атомная энергия, 1, 3 (1956).
4. В. И. Курилко, Ю. В. Ткач, В. А. Шендрик, ЖТФ, 44, № 5, 956 (1974).