Краткие сообщения по физике № 9 1982

О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Решетняк, С. М. Харчев, Л. А. Шелепин

УДК 537.75

Для кинетических уравнений типа Фоккера – Планка предлагается последовательная методика расчета всех собственных значений и собственных функций.

Асимптотические во времени решения линейных кинетических уравнений играют важную роль в исследовании марковских процессов /I/. Они отражают практически наиболее интересную кинетическую стадию процесса, дают знание функции распределения, характерной скорости процесса, потока плотности вероятности и т.д. Для построения таких решений существуют два подхода: метод собственных значений (СЗ) и собственных функций (СФ) и метод квазистационарных функций распределения (КФР) /2/. Второй, поскольку применим к более широкому классу уравнений, является более общим. В настоящей работе предлагается последовательная итерационная процедура построения всех СЗ и СФ соответствующей краевой задачи, основанная на методе КФР.

Рассмотрим кинетическое уравнение для неизвестной функции распределения $\varphi(x,t)$:

$$\rho\partial\varphi/\partial t = \hat{L}\varphi, \quad x\in[a,b], \tag{I}$$

с граничными и начальными условиями

$$\hat{\Gamma}_1\varphi|_{x=a} = 0, \quad \hat{\Gamma}_2\varphi|_{x=b} = 0, \quad \varphi(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

где $\hat{L}$ – не зависящий от времени линейный самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка с дискретным спектром СЗ, $\hat{\Gamma}_i = \mu_i + \nu_i \partial/\partial x$, $\psi(x)$ – произвольная начальная функция распределения.

Пусть стационарное решение (I) с граничными условиями (2) есть тождественный нуль. Тогда уравнение (I) можно представить в виде /2/

$$\varphi = g\beta_0 + \hat{L}^{-1}\rho\partial\varphi/\partial t = g\beta_0 + \hat{E}\varphi, \tag{3}$$

где $g(t)$ – произвольная функция времени, $\beta_0(x)$ – решение уравнения $\hat{L}\beta_0 \equiv 0$, удовлетворяющее только одному граничному условию (2), например, $\hat{\Gamma}_1\beta_0|_{x=a} = 0$; $\hat{L}^{-1}f = \int_a^x K(x,\xi)f(\xi,t)d\xi$, $K(x,\xi)$ – ядро оператора $\hat{L}^{-1}$ обратного к $\hat{L}$.

Итерируя (3), представим точное решение (I) в виде бесконечного ряда по степеням оператора $\hat{E}$ /2/:

$$\varphi = g\beta_0 + \hat{E}g\beta_0 + \ldots + \hat{E}^n g\beta_0 + \ldots . \tag{4}$$

Учет конечного числа слагаемых в (4) соответствует построению асимптотического по времени решения уравнения (I). Требуя для решения с $n+1$ слагаемыми выполнения второго граничного условия в точке $x = b$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению порядка n относительно функции $g(t)$, из которого она определяется. С ростом n интервал времени, на котором применимо асимптотическое решение, увеличивается. Основной трудностью на этом пути является нахождение корней характеристического уравнения – приближенных СЗ. Ниже предлагается последовательная итерационная процедура построения всех СЗ и соответствующих им СФ оператора $\hat{L}$, основанная на представлении решения в виде ряда по степеням оператора $\hat{E}$ и свойстве ортогональности СФ.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ – СЗ, занумерованные в порядке их возрастания по абсолютной величине, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ – соответствующие им СФ. Тогда

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \exp(-\lambda_n t), \tag{5}$$

где $c_n = (\psi, \varphi_n)/(\varphi_n, \varphi_n)$. Символом (,) обозначается скалярное произведение двух функций с весом ρ.

Подставляя (5) в (3) и полагая $g = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-\lambda_n t)$ имеем

$$\varphi_n = \beta_0 - \lambda_n \hat{L}^{-1} \rho \varphi_n. \tag{6}$$

Уравнение (6) решаем итерациями. Обозначая с помощью верхнего индекса их номер, можно записать:

$$\varphi_n^{(m)} = \beta_0 - \lambda_n^{(m)} \hat{L}^{-1} \rho \varphi_n^{(m-1)}. \tag{7}$$

Полагая на нулевом шаге $\varphi_n^{(0)} = \beta_0$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(m)} &= \beta_0 - \lambda_n^{(m)} \beta_1 + \lambda_n^{(m)} \lambda_n^{(m-1)} \beta_2 - \ldots \\ &+ (-1)^m \lambda_n^{(m)} \lambda_n^{(m-1)} \ldots \lambda_n^{(1)} \beta_m, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\beta_m = \hat{L}^{-1} \rho \beta_{m-1}$.

Из (8) следует, что СФ представимы в виде разложений по координатным функциям $\beta_m(x)$ с коэффициентами, зависящими от значений СЗ на последовательных шагах итераций.

Приведем теперь алгоритм расчета $\lambda_n^{(m)}$. Отметим, что СФ (8) удовлетворяют только граничному условию в точке $x = a$. Поэтому при вычислении $\lambda_n^{(m)}$ потребуем также, чтобы СФ (8) удовлетворяли и граничному условию при $x = b$. Обратимся сначала к определению минимального СЗ и соответствующей СФ с помощью итерационной процедуры /2/.

В первом приближении для φ_1 и λ_1 положим в формуле (8) $m = n = 1$. Подчиняя $\varphi_1^{(1)}$ условию (2) при $x = b$, получаем

$$\lambda_1^{(1)} = \alpha_0/\alpha_1, \tag{9}$$

где $\alpha_1 = \hat{\Gamma}_2 \beta_1|_{x=b}$.

Во втором приближении снова требуем для $\varphi_1^{(2)}$ выполнения условия (2) при $x = b$. Тогда

$$\lambda_1^{(2)} = \alpha_0/(\alpha_1 - \lambda_1^{(1)}\alpha_2). \tag{10}$$

Аналогично в третьем приближении

$$\lambda_1^{(3)} = \alpha_0/(\alpha_1 - \lambda_1^{(2)}\alpha_2 + \lambda_1^{(2)}\lambda_1^{(1)}\alpha_3) \tag{11}$$

и т.д. На каждом последующем шаге СЗ определяется его значениями на предыдущих.

Главное асимптотическое по времени решение с λ_1 и φ_1 соответствует частичной сумме в ряде (4) с нулевой и первой степенью оператора $\hat{E}$. Для построения следующего по абсолютной величине СЗ и СФ необходимо учитывать в (4) слагаемое с $\hat{E}^2$. Следовательно, правильную информацию о λ_2 и φ_2 в первом приближении можно получить только на втором шаге итерирования (6) с неопределенным значением $\lambda_2^{(1)}$. Информация о λ_3 и φ_3 возникает при учете в (4) слагаемого с $\hat{E}^3$. Первое приближение здесь соответствует решению (6) на третьем шаге итераций с неопределенными значениями $\lambda_3^{(1)}$ и $\lambda_3^{(2)}$. В общем случае первым приближением для φ_n является функция $\varphi_n^{(n)}$ с $n-1$ параметрами $\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}, \ldots, \lambda_n^{(n-1)}$, которые вместе с СЗ $\lambda_n^{(n)}$ находятся из условий ортогональности $\varphi_n^{(n)}$ к уже построенным $\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \ldots, \varphi_{n-1}^{(n)}$ и второго граничного условия т.е. из следующей системы уравнений:

$$\begin{gathered}(\varphi_n^{(n)}, \varphi_1^{(n)}) = 0, \ (\varphi_n^{(n)}, \varphi_2^{(n)}) = 0, \ \ldots, \\ (\varphi_n^{(n)}, \varphi_{n-1}^{(n)}) = 0, \ \hat{\Gamma}_2\varphi_n^{(n)}|_{x=b} = 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Вторым приближением для φ_n является функция $\varphi_n^{(n+1)}$, содержащая соответствующее ей СЗ $\lambda_n^{(n+1)}$, СЗ $\lambda_n^{(n)}$, определенное из решения системы (I2), и параметры $\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}, \ldots, \lambda_n^{(n-1)}$. Заменяя в (I2) верхний индекс n на $n+1$ и решая полученную систему, находим $\lambda_n^{(n+1)}$ и уточненные значения параметров $\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}, \ldots, \lambda_n^{(n-1)}$. В третьем приближении вместо верхнего индекса n в (I2) подставляем $(n+2)$ и решаем систему относительно $\lambda_n^{(n+2)}$ и тех же параметров с полученными СЗ в предыдущих приближениях $\lambda_n^{(n)}$ и $\lambda_n^{(n+1)}$ и т.д.

Так в первом приближении для φ_2 и λ_2 имеем

$$\lambda_2^{(1)} = \Delta_{01}^{(2)}/\Delta_{02}^{(2)}, \quad \lambda_2^{(2)} = \Delta_{02}^{(2)}/\Delta_{12}^{(2)}, \tag{I3}$$

где $$\Delta_{ik}^{(m)} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_k \\ b_{i1}^{(m)} & b_{k1}^{(m)} \end{vmatrix}, \quad b_{ik}^{(m)} = (\beta_i, \varphi_k^{(m)}),$$

а соответствующая СФ $\varphi_2^{(2)}$ определена формулой (8).

Во втором приближении

$$\lambda_2^{(1)} = (\lambda_2^{(2)}\Delta_{02}^{(3)} - \Delta_{01}^{(3)})/\lambda_2^{(2)}\Delta_{03}^{(3)}, \quad \lambda_2^{(3)} = \Delta_{03}^{(3)}/(\Delta_{13}^{(3)} - \lambda_2^{(2)}\Delta_{23}^{(3)}). \tag{I4}$$

Первое приближение для φ_3 и λ_3 имеет вид

$$\lambda_3^{(1)} = \Delta_{012}^{(3)}/\Delta_{013}^{(3)}, \quad \lambda_3^{(2)} = \Delta_{013}^{(3)}/\Delta_{023}^{(3)}, \quad \lambda_3^{(3)} = \Delta_{023}^{(3)}/\Delta_{123}^{(3)}, \tag{I5}$$

где $$\Delta_{ijk}^{(m)} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_k \\ b_{i1}^{(m)} & b_{j1}^{(m)} & b_{k1}^{(m)} \\ b_{i2}^{(m)} & b_{j2}^{(m)} & b_{k2}^{(m)} \end{vmatrix}.$$

Сходимость итерационной процедуры была проверена путем решения конкретного уравнения (I) с $\hat{L} = \partial^2/\partial x^2$, $\rho = 1$, $x \in [0, 1]$, $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 = 1$. Спектр СЗ и соответствующих СФ в этом случае хорошо известен: $\lambda_n = (\pi n)^2$, $\varphi_n \sim \sin(\pi n x)$. Ядро обратного оператора $\hat{L}^{-1}$ имеет вид $K(x, \xi) = x - \xi$, поэтому разложение ведется по координатным функциям $\beta_n = x^{2n+1}/(2n+1)!$. Были получены следующие приближения для первых СЗ задачи: $\lambda_1^{(1)} = 6$; $\lambda_1^{(2)} = 8{,}6$ $\lambda_1^{(3)} = 9{,}5$; $\lambda_1^{(4)} = 9{,}8$; $\lambda_2^{(2)} = 25{,}2$; $\lambda_2^{(3)} = 31{,}5$; $\lambda_2^{(4)} = 35{,}3$; $\lambda_3^{(3)} = 54{,}6$; $\lambda_3^{(4)} = 64{,}5$. Видно, что скорость сходимости итераций для минимального СЗ λ_1 достаточно высока. Уже на третьем шаге относительная ошибка расчета менее 4%, а на четвертом менее 0,6%. Сходимость итераций к λ_2 несколько медленне, чем к λ_1, а к λ_3 медленнее, чем к λ_2. Следует обратить внимание, что соотношения между различными СЗ почти правильные (СЗ $\lambda_2^{(2)}$ и $\lambda_3^{(3)}$ примерно в четыре и девять раз больше $\lambda_1^{(1)}$ соответственно).

Если исходная задача такова, что удовлетворяет сразу обоим граничным условиям (2), то $\alpha_0 = 0$ и на всех шагах итераций $\lambda_1^{(m)} = 0$, $\varphi_1^{(m)} \equiv \beta_0$. Следовательно, β_0 есть физический стационар. При этом процедура вычисления следующих СЗ и СФ не меняется.

Возможность построения асимптотических по времени решений с высшими СЗ и СФ открывает определенные перспективы при изучении процессов, протекающих за времена существенно меньшие характерного времени установления равновесия, а также позволяет указать границы применимости используемых приближений.

Поступила в редакцию
I3 мая 1982 г.

Литература

I. Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, М., 1946 г.

2. С. А. Решетняк, С. М. Харчев, Л. А. Шелепин, ТМФ, 49, I3I (I98I).