Краткие сообщения по физике № 11 1982

КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ АТОМА ВОДОРОДА

В. В. Зверев, Б. Я. Рубинштейн

УДК.530.6I

На основе метода Переломова и метода Барута и Джирарделло построены когерентные состояния атома водорода. Обсуждаются квазиклассические свойства таких состояний.

Обозначим $a_{\alpha\beta}$ генераторы динамической O(4.2) группы атома водорода (укажем связь с обозначениями Барута /I/: $a_{\alpha 0} = J_\alpha$, $a_{\alpha 1} = M_\alpha$, $a_{\alpha 2} = -\Gamma_\alpha$, $a_{\alpha 3} = A_\alpha$, $a_{01} = \Gamma_4$, $a_{02} = T$, $a_{03} = \Gamma_0$). Полагаем, что векторы сферического $|n, l, m\rangle$ и параболического $|n, n_1, n_2, m\rangle$ базисов в пространстве R векторов, получающихся из векторов физических состояний преобразованием гиперболического "поворота" (переход $\psi \to \tilde{\psi}$ в /I/), являются собственными векторами операторов a_{03} и a_{30} с собственными значениями n и m $(n_1 + n_2 = n - m - 1)$.

Выделим три схемы сужения на подгруппу, каждой из которых соответствует определенный способ построения пространства R (подпространств $R^{\pm}$, объединение которых дает R) из пространств неприводимых представлений (НП) групп O(3) и O(2.I): (а) $O(4.2) \supset O(4) \sim O(3) \oplus O(3)$; (б) $O(4.2) \supset O(2.2) \sim O(2.1) \oplus O(2.1)$; (в) $O(4.2) \supset O(3) \oplus O(2.1)$. Подалгебры, генерирующие подгруппы справа в (а) – (в), имеют вид: (а) $p^+_\alpha \oplus p^-_\beta$, (б) $q^+_\alpha \oplus q^-_\beta$, (в) $a_{\alpha 0} \oplus a_{0\beta}$; $p^{\pm}_\alpha = 1/2(a_{\alpha 0} \pm a_{\alpha 3})$, $q^{\mp}_\alpha = 1/2(a_{0\alpha} \pm a_{3\alpha})$. Соответственно:

$$(а)\quad R = \oplus_{n\geq 1}\{R(+, n-1, (n_1)) \oplus R(+, n-1, (n_2))\},$$

$$(б)\quad R^+ = \oplus_{m\geq 0}\{R(-, 1+m, (n_1)) \oplus R(-, 1+m, (n_2))\},$$

$$R^{-} = \oplus_{m\leq 0}\{R(-,\ 1-m,\ (n_1+m)) \otimes R(-,\ 1-m,\ (n_2+m))\},$$

$$\text{(в)}\quad R = \oplus_{l\geq 0}\{R(+,\ 2l,\ (l-m)) \otimes R(-,\ 2l+2,\ (n-l-1))\}, \qquad (I)$$

где $R(\varepsilon, S, (K))$ обозначены пространства НП групп $O(3)$ и $O(2.I)$, в которых индексация базисных векторов $|(\varepsilon, S), K\rangle$ такова, что операторы E_3 и $E_1^2 + E_2^2 + \varepsilon E_3^2$ имеют собственные значения $S/2 - \varepsilon K$ и $S/2 + \varepsilon S^2/4$. Здесь E_α – генераторы указанных групп; $\varepsilon = \pm 1$ (или $\pm$); знак плюс (минус) соответствует группе $O(3)$ (группе $O(2.I)$); число $S = 1, 2, \ldots$ индексирует различные НП; для $O(3)$ $K = 0, 1, \ldots S$; для $O(2.I)$ $K = 0, 1, \ldots$ (представления дискретной серии).

Выделим также подпространства векторов с максимальными $|n, 0, 0, n-1\rangle$ (минимальными $|n, n-1, n-1, -n+1\rangle$) значениями магнитного квантового числа, соответствующие круговым орбитам (КО) /2/, которые являются старшими векторами в подпространствах, составляющих прямые суммы (I). В подпространствах векторов КО реализуются НП группы $O(2.I)$ с $S = 1$; соответствующие алгебры генераторов: $\chi_1^{\pm} = (1/2)(\pm a_{11} - a_{22})$, $\chi_2^{\pm} = (1/2)(a_{21} \pm a_{12})$, $\chi_3^{\pm} = (1/2)(a_{03} \pm a_{30})$ (знак плюс (минус) соответствует подпространству векторов с $m = n - 1$ ($m = -n + 1$)).

Следуя идее работы /3/, при построении КС в пространстве R выделим два этапа: вначале введем КС в подпространствах векторов КО (с помощью операторов $\chi_\alpha^{\pm}$), а затем КС в R (используя генераторы подгрупп, стоящих справа в (а) – (в)).

Запишем КС групп $O(3)$ и $O(2.I)$ с помощью производящих операторов, опуская явные выражения, приведенные в /4,5/:

$$|(\varepsilon, S), \omega\rangle = D_\nu((\varepsilon, S), \omega, (E_\alpha))|(\varepsilon, S), K = 0\rangle \qquad (2)$$

($\nu = 1$ соответствует КС Переломова /4/ для $O(3)$ и $O(2.I)$; $\nu = 2$ соответствует КС Барута и Джирарделло /5/ для $O(2.I)$). Условимся называть КС квазиклассическим, если в классическом пределе (КП) они обладают свойством: $|\langle\psi|\psi'\rangle|^2 \to 0$ при $|\psi'\rangle \neq |\psi\rangle$, ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$), а также если средние от произведений операторов стремятся в КП к произведениям средних (здесь и далее стрелкой обозначается переход к КП). КС Переломова являются квазиклассическими при $s \to \infty$, а КС Барута и Джирарделло – при фиксированном s и $|\omega| \to \infty$ (существенно, что для различных КС переходу к КП соответствуют различные предельные операции).

Поскольку для НП группы O (2.I) в пространствах векторов КО число s фиксировано, для получения квазиклассических состояний на первом этапе следует воспользоваться методом Барута и Джирарделло. В результате получим:

$$|\omega^{\pm}\rangle = D_2((-, 1), \omega, (\chi^{\pm}_{\alpha}))|1, 0, 0, 0\rangle. \tag{3}$$

При $|\omega| \to \infty$ основной вклад в средние, вычисленные с помощью КС (3), дают векторы КО с большими n. Для каждого из пространств НП группы O(3) и O(2.I), стоящих в (I) справа, это число играет роль индекса s, поэтому на втором этапе мы используем метод Переломова. Поставим в соответствие каждой из схем сужения на подгруппу (а) – (в) рецепт построения КС атома водорода:

$$|O(4), \omega^{\pm}, \tau, \eta\rangle = D_1((+), \tau, (p^{+}_{\alpha}))D_1((+), \eta, (p^{-}_{\alpha}))|\omega^{\pm}\rangle, \tag{4}$$

$$|O(2.2), \omega^{\pm}, \tau, \eta\rangle = D_1((-), \tau, (q^{+}_{\alpha}))D_1((-), \eta, (q^{-}_{\alpha}))|\omega^{\pm}\rangle, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} |O(3) \otimes O(2.1), \omega^{\pm}, \tau, \eta\rangle = D_1((+), \tau, (a_{\alpha 0}))\times \\ \times D_1((-), \eta, (a_{0\alpha}))|\omega^{\pm}\rangle \end{aligned} \tag{6}$$

(в производящих операторах КС мы опустили индексы НП).

Рассмотрим переход к КП для КС типа (4) (знак плюс). Перепишем КС в форме $T(\alpha, \beta, \gamma)\exp(i\lambda a_{13})|\omega^{+}\rangle$, эквивалентной (4) и отличающейся лишь способом параметризации. При отыскании средних оператор поворотов $T(\alpha, \beta, \gamma)$, задающий угловое положение распределения электронной плотности в пространстве, может быть без потери общности отброшен. Рассчитывая средние значения главного квантового числа, компонент углового момента, модуля и компонент радиус-вектора электрона в КС $\exp(i\lambda a_{13})|\omega^{+}\rangle$, можно показать, что при $|\omega|\to\infty$ эти КС описывают хорошо сфазированный волновой пакет, находящийся на эллиптической орбите с эксцентриситетом $\sin\lambda$ (угловой момент равен $\langle n\rangle\cos\lambda$, где $\langle n\rangle\sim|\omega|$; угловое положение центра пакета определяется параметром $\arg(\omega)$). Усредняя с помощью КС правую и левую части уравнения Гейзенберга для радиус-вектора и заменяя средние от произведений операторов произведениями средних, можно получить классическое уравнение движения для задачи Кеплера.

Предлагаемый способ построения КС атома водорода отличается от описанного в /3/, где и на первом, и на втором этапах введения КС использовался метод Переломова. КС из /3/ при $\langle n\rangle\to\infty$ не обладают квазиклассичностью в указанном выше смысле.

Поступила в редакцию
10 мая 1982 г.

Литература

1. А. Барут, Р. Рончка, Теория представлений групп и ее приложения, т. 2. "Мир", М., 1980 г., с. 11-13.
2. L. S. Brown, Am. Journ. Phys., 41, 525 (1973).
3. J. Mostowsky, Lett. Math. Phys., 2, 1 (1977).
4. А. М. Переломов, УФН, 123, 23 (1977).
5. A. O. Barut, L. Girardello, Comm. Math. Phys., 21, 41 (1971).