УДК 531.51

О ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ ГРАВИТАЦИИ

А. И. Никишов

С помощью теории источников я рассматриваю следствия использования теоретико-полевой 3-гравитонной вершины вместо соответствующей вершины общей относительности. В качестве примера я изучаю низшие нелинейные члены внешней метрики сферически-симметричного тела. Рассмотрение наводит на мысль о том, что метрику не следует получать из решения гравитационного уравнения. Кроме того, создаётся впечатление, что, начиная с нелинейных членов, концепция пробной частицы применима только в нерелятивистском пределе.

Ключевые слова: феноменологическая гравитация, G^2-приближение, теория источников.

Используются следующие обозначения

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}^{(1)} + h_{ij}^{(2)} + \cdots, \quad h_{ij}^{(n)} \propto G^n, \qquad h = h^k{}_k,$$

$$h_{,i} = \frac{\partial h}{\partial x^i}, \quad \eta_{ij} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1). \tag{1}$$

В этой статье изучается в основном $h_{ij}^{(2)}$ и верхний индекс (2) как правило опускается, чтобы не загромождать обозначение.

В феноменологическом подходе к гравитации нужны тензор энергии-импульса гравитационного поля, входящий в 3-гравитационную вершину, и тензор энергии-импульса взаимодействия гравитона с материей. Тензор энергии-импульса гравитационного поля получается из должным образом выбранного лагранжиана по известным рецептам. Что же касается тензора энергии-импульса взаимодействия гравитона с материей, то здесь приходится гадать. По этой причине я, имея в виду будущие модификации и уточнения, рассматриваю все возможные строительные блоки:

$$\overset{1}{\tau}{}^{jk} = \eta^{jk} h_{\alpha\beta,\gamma} h^{\gamma\beta,\alpha}; \quad \overset{2}{\tau}{}^{jk} = \eta^{jk} h_{\alpha\beta,\gamma} h^{\alpha\beta,\gamma}; \quad \overset{3}{\tau}{}^{jk} = \eta^{jk} h_{,\rho} h^{\rho\sigma}{}_{,\sigma}; \quad \overset{4}{\tau}{}^{jk} = \eta^{jk} h_{,\rho} h^{,\rho};$$

ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: nikishov@lpi.ru.

$$\overset{5}{\mathcal{T}}{}^{jk} = h_{\alpha\beta}{}^{,j} h^{\alpha\beta,k}; \quad \overset{6}{\mathcal{T}}{}^{jk} = h^{j\alpha,\beta} h^{k}{}_{\beta,\alpha}; \quad \overset{7}{\mathcal{T}}{}^{jk} = h^{j\alpha,\beta} h^{k}{}_{\alpha,\beta}; \quad \overset{8}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{j\alpha,k} + h^{k\alpha,j}) h_{,\alpha};$$

$$\overset{9}{\mathcal{T}}{}^{jk} = h^{jk,\sigma} h_{,\sigma}; \quad \overset{10}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{j\sigma}{}_{,\sigma} h^{,k} + h^{k\sigma}{}_{,\sigma} h^{,j}); \quad \overset{11}{\mathcal{T}}{}^{jk} = h^{,j} h^{,k}; \quad \overset{12}{\mathcal{T}}{}^{jk} = h^{jk,\alpha} h_{\alpha\sigma}{}^{,\sigma};$$

$$\overset{13}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{j\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}{}^{,k} + h^{k\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}{}^{,j}); \quad \overset{14}{\mathcal{T}}{}^{jk} = h^{j\sigma}{}_{,\sigma} h^{k\alpha}{}_{,\alpha}; \quad \overset{15}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{j\alpha,k} + h^{k\alpha,j}) h_{\alpha\sigma}{}^{,\sigma};$$

$$\overset{16}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \eta^{jk} h_{\alpha\beta}{}^{,\beta} h^{\alpha\sigma}{}_{,\sigma}; \quad h_{,i} = \frac{\partial h}{\partial x^i}, \tag{2}$$

и

$$\overset{a}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \eta^{jk} h_{,\sigma}{}^{\sigma} h; \quad \overset{b}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \eta^{jk} h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} h; \quad \overset{c}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \eta^{jk} h^{,\alpha\beta} h_{\alpha\beta}; \quad \overset{d}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \eta^{jk} h^{\alpha\beta,\sigma}{}_{\sigma} h_{\alpha\beta};$$

$$\overset{e}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \eta^{jk} h^{\alpha\sigma}{}_{,\sigma}{}^{\beta} h_{\alpha\beta}; \quad \overset{f}{\mathcal{T}}{}^{jk} = h^{,jk} h; \quad \overset{g}{\mathcal{T}}{}^{jk} = h^{jk,\sigma}{}_{\sigma} h; \quad \overset{h}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{j\sigma,k}{}_{\sigma} + h^{k\sigma,j}{}_{\sigma}) h;$$

$$\overset{i}{\mathcal{T}}{}^{jk} = h^{jk,\alpha\beta} h_{\alpha\beta}; \quad \overset{j}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{j\alpha,k\beta} + h^{k\alpha,j\beta}) h_{\alpha\beta}; \quad \overset{k}{\mathcal{T}}{}^{jk} = h^{\alpha\beta,jk} h_{\alpha\beta}; \quad \overset{l}{\mathcal{T}}{}^{jk} = h^{jk} h_{,\sigma}{}^{\sigma};$$

$$\overset{m}{\mathcal{T}}{}^{jk} = h^{jk} h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta}; \quad \overset{n}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{,j\alpha} h_{\alpha}{}^{k} + h^{,k\alpha} h_{\alpha}{}^{j}); \quad \overset{o}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{j\sigma,\alpha}{}_{\sigma} h_{\alpha}{}^{k} + h^{k\sigma,\alpha}{}_{\sigma} h_{\alpha}{}^{j});$$

$$\overset{p}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{j\alpha,\sigma}{}_{\sigma} h_{\alpha}{}^{k} + h^{k\alpha,\sigma}{}_{\sigma} h_{\alpha}{}^{j}); \quad \overset{q}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{\alpha\sigma,j}{}_{\sigma} h_{\alpha}{}^{k} + h^{\alpha\sigma,k}{}_{\sigma} h_{\alpha}{}^{j}). \tag{3}$$

В уравнениях (2) и (3) латинские и греческие индексы пробегают значения от 0 до 3.

3-гравитонная вершина представляется диаграммами двух типов: диаграмма a описывает взаимодействие пробной частицы с тензором энергии-импульса гравитационного поля, образованного двумя гравитонами тяжёлого источника. Две диаграммы b (дающие одинаковый результат) описывают взаимодействие гравитона тяжёлого источника с тензором энергии-импульса гравитационного поля, образованного другим гравитоном тяжёлого источника и гравитоном пробной частицы.

В статье [1] я привожу аргументы в пользу выбора гравитационного тензора энергии-импульса в виде

$$t^{jk} = \frac{1}{32\pi G}\Bigg[\Bigg(-\frac{1}{2}\overset{2}{\mathcal{T}}{}^{jk} + \frac{1}{2}\overset{4}{\mathcal{T}}{}^{jk} + \overset{5}{\mathcal{T}}{}^{jk} - \overset{9}{\mathcal{T}}{}^{jk} + 2\overset{10}{\mathcal{T}}{}^{jk} - \overset{11}{\mathcal{T}}{}^{jk} + 2\overset{12}{\mathcal{T}}{}^{jk} - 2\overset{13}{\mathcal{T}}{}^{jk} -$$

$$- 2\overset{14}{\mathcal{T}}{}^{jk} + 2\overset{15}{\mathcal{T}}{}^{jk} - \overset{16}{\mathcal{T}}{}^{jk}\Bigg) + \overset{c}{\mathcal{T}}{}^{jk} - 2\overset{e}{\mathcal{T}}{}^{jk} + 2\overset{j}{\mathcal{T}}{}^{jk} - \overset{l}{\mathcal{T}}{}^{jk} + 2\overset{m}{\mathcal{T}}{}^{jk} - 2\overset{o}{\mathcal{T}}{}^{jk}\Bigg] +$$

$$+\frac{1}{2}\left(T^{jn} h_{n}{}^{k} + T^{kn} h_{n}{}^{j}\right) \tag{4}$$

и здесь я его использую. Члены тензора энергии-импульса взаимодействия гравитона с материей (последние члены в (4)) я выбираю так, чтобы уравнения движения пробной частицы, следующие из сохранения полного тензора энергии-импульса, были такими же, как в общей относительности. Для начала я выбираю тензор энергии-импульса материи в виде тензора энергии-импульса точечных частиц

$$T^{ij} = \sum_a m_a u^i u^j \frac{d\tau}{dt}\delta(\vec{x} - \vec{x}_a)(t), \quad u^j = \frac{dx^j}{d\tau}, \quad ds^2 = -d\tau^2, c = 1. \tag{5}$$

Полный тензор энергии-импульса даётся суммой выражений (4) и (5).

Из (4) для медленных частиц имеем

$$t^{00} = 2T^{00}\phi + \frac{1}{8\pi G}(\nabla\phi)^2. \tag{6}$$

Здесь

$$\phi = -G\sum_a \frac{m_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}. \tag{7}$$

Заметим, что для получения правильной прецессии перигелия планеты нужно [3] $h_{00}^{(2)} = -2\phi^2$, где ϕ – потенциал Солнца.

Вычисления показывают, что только последний член в (4) (т.е. член с фактором $1/2$ перед ним) даёт вклад в $h_{00}^{(2)}$. Для медленных частиц это первый член в правой части (6). Он даёт в два раза больше, чем нужно, как будет видно ниже. Однако такого же типа член содержится и в (5). Для медленных частиц из него поступает $-T^{00}\phi$. Вместе с первым членом в правой части (6) это даёт нужное $T^{00}\phi$. Так это и должно быть, чтобы (4) и (5) давали правильный ньютоновский предел для гравитационной энергии (вместе с последним членом в правой части (6), (ср. с Задачей 6 §106 в [2], смотри также [5]).

Кстати, из того факта, что плотность энергии гравитационного поля положительна (смотри последний член в правой части (6)), можно ожидать, что притяжение двух компактных тел (таких как нейтронные звёзды) слабее ньютоновского, так как заметная часть их энергии находится вне разделяющего их расстояния. Другими словами, массы в формуле $-Gm_1m_2/r$ – это массы вместе с их гравитационной энергией.

Швингер показал, что наличие ньютоновского взаимодействия Солнце–планета $m\phi = -\dfrac{GMm}{r}$ приводит к поправке к потенциалу Солнца $\phi \to \phi(1 + 1/2\phi)$:

$$G^2M^2m\int\frac{d^3x'}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}'|}\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}'|}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} = \frac{G^2M^2m}{2r^2} = \frac{1}{2}\phi^2 m, \tag{8}$$

смотри Гл. 2, §4, ур.(4.53) в [2]. Это уравнение – пример диаграммы типа b. Здесь существенно, что пробная частица нерелятивистская. Таким образом, непосредственное использование 3-гравитонной вершины не сводит движение релятивистской пробной частицы к движению во внешнем поле. Если же 3-гравитонная вершина используется как часть лагранжиана в вариационном принципе, то такое сведение осуществляется. Это эквивалентно тому, что от диаграмм типа b переходим к диаграммам a, смотри (A25) в Приложении.

Возвращаясь к Солнцу и планете, имеем для вклада Солнца в T^{00} из (5)

$$M\frac{dt}{d\tau}\delta(\vec{x}) = M\left(1+\frac{mG}{r}\right)\delta(\vec{x}), \tag{9}$$

потому что $d\tau^2 = -g_{00}dt^2$, $\quad g_{00} = -1 + h_{00}^{(1)}$, где $h_{00}^{(1)}$ порождено пробной частицей (планетой в нашем случае). Если же пробная частица релятивистская, уравнение (9) не имеет места, потому что в нём не учтено запаздывание. Аналогично (9) для планеты имеем

$$m\frac{dt}{d\tau}\delta(\vec{x}-\vec{x}(t)) = m\left(1+\frac{MG}{r}\right)\delta(\vec{x}-\vec{x}(t)). \tag{10}$$

Переходя от плотности энергии к энергии (то есть, интегрируя по пространству), видим, что из суммы (9) и (10) поступает член $2GMm/r$, а из $2T^{00}\phi$ в (6) – член $-4GMm/r$. Их сумма даёт $-2GMm/r$, что в два раза больше величины, фигурирующей в (8). Следовательно теперь $\phi \to \phi(1+\phi)$ и $h_{00}^{(2)} = -2\phi^2$.

Интересно отметить, что в этом подходе (в отличие от общей относительности) пробная частица даёт вклад в тензор энергии-импульса тяжёлой частицы, а он даёт вклад в $h_{00}^{(2)}$ также посредством диаграммы b.

Используя линеаризованное уравнение Эйнштейна, член в (4) с фактором $1/2$ перед ним можно записать в виде

$$\frac{1}{2}(T^{jn}h_n{}^k + T^{kn}h_n{}^j) = \frac{1}{32\pi G}\left[2\overset{l}{\tau}{}^{jk} - 2\overset{m}{\tau}{}^{jk} - 2\overset{n}{\tau}{}^{jk} + 2\overset{o}{\tau}{}^{jk} - 2\overset{p}{\tau}{}^{jk} + 2\overset{q}{\tau}{}^{jk}\right]. \tag{11}$$

С помощью табл. 2 в Приложении найдём, что $h_{00}^{(2)}$ здесь и в общей относительности одинаковы, но здесь

$$h_{\alpha\beta}^{(2)} = M^2G^2\left(9\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^2} - 7\frac{x_\alpha x_\beta}{r^4} - \frac{192}{35}B_{\alpha\beta}\right), \quad B_{\alpha\beta} = b\left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{3r^3} - \frac{x_\alpha x_\beta}{r^5}\right), \tag{12}$$

а рамках общей относительности в согласии с [4] найдём

$$h_{\alpha\beta}^{(2)GR} = M^2G^2\left(5\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^2} - 7\frac{x_\alpha x_\beta}{r^4} - \frac{192}{35}B_{\alpha\beta}\right). \tag{13}$$

Как упомянуто выше, я предполагаю, что тензор энергии-импульса материи – это тензор энергии-импульса точечных частиц, а хотелось бы учесть и радиус тяжёлого тела. Я не уверен как это сделать. (Это обстоятельство не затрагивает $h_{00}^{(2)}$.) По этой причине я и не пытаюсь учесть гравитационный дефект масс в членах, пропорциональных $\dfrac{MG}{r}$ и $\dfrac{MG\delta_{\alpha\beta}}{r}$. Всё же кажется маловероятным, чтобы этот дефект оказался одинаковым в упомянутых членах и таким же, как в общей относительности.

Таким образом показано, что подход, основанный на теории источников, открывает новые возможности в изучении гравитации.

Приложение

Гравитационные потенциалы ϕ шара материи радиуса b и их производные.

$r < b$:

$$\phi(x) = \frac{MG}{2b}\left(\frac{r^2}{b^2} - 3\right), \quad \phi_{,\alpha}(x) = \frac{MG}{b^3}x_\alpha, \quad \phi_{,\alpha\beta} = \frac{MG}{b^3}\delta_{\alpha\beta}, \quad \mu = \frac{3M}{4\pi b^3},$$

$$(\nabla\phi)^2 = \frac{M^2G^2}{b^6}r^2, \quad p(r) = \frac{M^2G^2}{8\pi G b^4}\left(3 - \frac{3r^2}{b^2}\right),$$

$$h_{ik}^{(1)} = -2\delta_{ik}\phi = -\delta_{ik}\frac{MG}{b}\left(\frac{r^2}{b^2} - 3\right). \tag{A1}$$

Здесь μ – плотность материи, $p(r)$ – давление на радиусе r.

$r > b$:

$$\phi(x) = -\frac{MG}{r}, \quad \phi_{,\alpha} = \frac{MGx_\alpha}{r^3}, \quad (\nabla\phi)^2 = \frac{M^2G^2}{r^4}, \quad \phi_{,\alpha\beta} = -MG(1/r)_{,\alpha\beta} =$$

$$= MG\left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} - \frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5}\right), \quad h_{ik}^{(1)} = -2\delta_{ik}\phi = \frac{2MG}{r}\delta_{ik}, \quad \nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\vec{x}). \tag{A2}$$

Чтобы иметь возможность проводить вычисления при разных 3-гравитонных вершинах сначала вычисляются вклады в $h_{ij}^{(2)}$ от каждого $\overset{s}{\tau}{}^{kp}/32\pi G, s = 1, 2, \cdots$ Затем для каждой специфической вершины берутся вклады от каждого s с весом a_s. Для двух случаев (общей относительности и рассматриваемого здесь подхода) эти a_s приведены в табл. 1 в [1]. Теперь в качестве примера покажем как вычисляется вклад в $h_{ij}^{(2)}$ для $s = 3$ в случае диаграммы b. Итак, вклад от $\overset{3}{\tau}{}^{kp} = \eta_{kp}h_{,n}h^{nm}{}_{,m}$ в $\overset{3}{h}{}_{ij}(b|x)$ даётся выражением

$$\frac{1}{2}\int d^4x'\frac{\partial D_{ijp}{}^p(x - x')}{\partial x'^n}h^{nm}{}_{,m}(x')\eta_{kp}h^{kp}(x'). \tag{A3}$$

Здесь пропагатор

$$D_{ijlm}(x - x') = P_{ijlm}D_+(x - x'), \quad P_{ijlm} = \frac{1}{2}(\eta_{il}\eta_{jm} + \eta_{im}\eta_{jl} - \eta_{ij}\eta_{lm}), \quad P_{ijp}{}^p = -\eta_{ij}. \tag{A4}$$

$$\int dt' D_+(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|}, \quad D_+(\vec{x}' - \vec{x}, \tau) = D_+(\vec{x}' - \vec{x}, |\tau|).$$

Используя эти соотношения, $\dfrac{\partial}{\partial x'^n} = -\frac{\partial}{\partial x^n}$ и выражения для $\phi_{,\alpha}, \phi$ в (A1), запишем (A3) в виде

$$4\eta_{ij}\frac{\partial}{\partial x^n}\int d^4x' D_+(x-x')\phi_{,n}(x')\phi(x') = 4\eta_{ij}\frac{\partial}{\partial x^n}\int \frac{d^3x'}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\phi_{,n}(x')\phi(x'). \qquad \text{(A5)}$$

Напомним, что в этой статье рассматривается только случай внешней метрики, т.е. $r > b$.

Для вычисления вклада от $r' < b$ нужны соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\int\limits_{r'<b}\frac{d^3x'}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}x'_\alpha\left(\frac{r'^2}{b^2}-3\right) = -\frac{16}{5\cdot 7}b^4 B_{\alpha\beta}, \quad B_{\alpha\beta} = b\left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{3r^3}-\frac{x_\alpha x_\beta}{r^5}\right), \qquad \text{(A6)}$$

смотри выражения для $\phi_{,\alpha}$ и ϕ в (A1). Для $\alpha = \beta$ правая часть (A6) равна нулю. Выражение (A6) следует из соотношений

$$\int\limits_{r'<b}\frac{d^3x'}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}x'_\alpha = \frac{b^5}{15}\frac{x_\alpha}{r^3}, \quad \int\limits_{r'<b}\frac{d^3x'}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}x'_\alpha\frac{r'^2}{b^2} = \frac{b^5}{21}\frac{x_\alpha}{r^3}, \quad \left(\frac{x_\alpha}{r^3}\right)_{,\beta} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3}-\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5}.$$

Для обратного порядка h в $\overset{3}{\tau}_{kp}$ имеем $\overset{3}{\tau}_{kp}{}^{\text{rev}} = \eta_{kp}h_{\alpha\beta,\beta}h_{,\alpha}$. Вместо (A3) получим

$$8P_{ij\alpha\beta}\left(-\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)\int\limits_{r'<b}\frac{d^3x'}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\phi_{,\alpha}(x')\phi(x') = G^2M^2\begin{cases} 0, & i=j=0, \\ \frac{64}{35}B_{\alpha\beta.}, & \alpha,\beta = 1,2,3. \end{cases} \qquad \text{(A7)}$$

Итак, вклад от $r' < b$ для среднего $\dfrac{1}{2}\left(\overset{3}{\tau}_{kp} + \overset{3}{\tau}_{kp}{}^{\text{rev}}\right)$ будет

$$\overset{3}{h}_{ij}(b|x) = G^2M^2\begin{cases} 0, & i=j=0, \\ \frac{32}{35}B_{\alpha\beta.}, & \alpha,\beta = 1,2,3. \end{cases} \qquad \text{(A8)}$$

Далее рассмотрим вклад от $r' > b$. В этом случае правая часть (A5) имеет вид

$$4\eta_{ij}G^2M^2\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\int\limits_{b<r'}\frac{d^3x'}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\left(\frac{1}{r'}\right)_{,\alpha}\frac{1}{r'}. \qquad \text{(A9)}$$

В соотношении

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\int\limits_{b<r'}\frac{d^3x'}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\left(\frac{1}{r'}\right)_{,\alpha}\frac{1}{r'} = -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{2r^2}+\frac{x_\alpha x_\beta}{r^4}+B_{\alpha\beta} \qquad \text{(A10)}$$

положим $\beta = \alpha$ и найдём

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\int\limits_{b<r'}\frac{d^3x'}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\left(\frac{1}{r'}\right)_{,\alpha}\frac{1}{r'} = -\frac{1}{2r^2}. \qquad \text{(A11)}$$

Для $r' > b$ вклад от $\overset{3}{\tau}_{kp}$ в $\overset{3}{h}_{ij}\,(r' > b, b|x)$ равен

$$G^2M^2 \begin{cases} \frac{2}{r^2}, i = j = 0, \\ -\frac{2\delta_{\alpha\beta}}{r^2}, \alpha, \beta = 1,2,3. \end{cases} \tag{A12}$$

Далее $\overset{3}{\tau}_{kp}{}^{\mathrm{rev}} = \eta_{kp} h_{\alpha\beta,\beta} h_{,\alpha}$ приводит к вкладу в $\overset{3}{h}_{ij}\,(b|x)$

$$8P_{ij\alpha\beta}\left(-\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)\int\limits_{r'>b}\frac{d^3x'}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\phi_\alpha(x')\phi(x') =$$

$$= G^2M^2 \begin{cases} \frac{2}{r^2}, i = j = 0, \\ \frac{2\delta_{\alpha\beta}}{r^2} - 8\frac{x_\alpha x_\beta}{r^4} - 8B_{\alpha\beta}., \quad \alpha, \beta = 1,2,3. \end{cases} \tag{A13}$$

Полусумма (A12) и (A13) равна

$$\overset{3}{h}_{ij}\,(r' > b, b|x) = G^2M^2 \begin{cases} \frac{2}{r^2}, i = j = 0, \\ -4\frac{x_\alpha x_\beta}{r^4} - 4B_{\alpha\beta}., \quad \alpha, \beta = 1,2,3. \end{cases} \tag{A14}$$

Действуя аналогично, получим табл. 1.

Таблица 1

Члены, определяющие h_{ij}, в зависимости от s при разных r'

s	$\frac{1}{r^2}$	$\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^2}$	$\frac{x_\alpha x_\beta}{r^4}$	$B_{\alpha\beta}$	r'
1	0	0	0	$\frac{32}{35}$	$r' < b$
1	1	1	–4	–4	$r' > b$
2	0	0	0	0	$r' < b$
2	4	0	0	0	$r' > b$
3	0	0	0	$\frac{32}{35}$	$r' < b$
3	2	8	–4	–4	$r' > b$
4	0	0	0	0	$r' < b$
4	4	–4	0	0	$r' > b$
5	0	0	0	0	$r' < b$
5	2	0	0	0	$r' > b$

Т а б л и ц а 1 (продолжение)

6	0	0	0	$\frac{16}{35}$	$r' < b$
6	1/2	1/2	–2	–2	$r' > b$
7	0	0	0	0	$r' < b$
7	1	–1	0	0	$r' > b$
8	0	0	0	$\frac{16}{35}$	$r' < b$
8	1	0	–2	–2	$r' > b$
9	0	0	0	0	$r' < b$
9	4	–2	0	0	$r' > b$
10	0	0	0	$\frac{16}{35}$	$r' < b$
10	1	0	–2	–2	$r' > b$
11	0	0	0	0	$r' < b$
11	2	–2	0	0	$r' > b$
12	0	0	0	$\frac{32}{35}$	$r' < b$
12	2	1	–4	–4	$r' > b$
13	0	0	0	$\frac{16}{35}$	$r' < b$
13	1/2	1/2	–2	–2	$r' > b$
14	0	0	0	$\frac{16}{35}$	$r' < b$
14	1/2	1/2	–2	–2	$r' > b$
15	0	0	0	$\frac{16}{35}$	$r' < b$
15	1/2	1/2	–2	–2	$r' > b$
16	0	0	0	$\frac{32}{35}$	$r' < b$
16	1	1	–4	–4	$r' > b$

Заметим, что диаграмма b не приводит к членам, пропорциональным $\dfrac{1}{rb}$ и $\dfrac{\delta_{\alpha\beta}}{rb}$.
Строка $s = 1, r' < b$ в табл. 1 означает

$$\overset{1}{h}_{ij}(r' < b, b|x) = G^2M^2 \begin{cases} 0, \quad i = j = 0, \\ \frac{32}{35}B_{\alpha\beta.}, \quad i = \alpha, j = \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Строка $s = 1, r' > b$ даёт

$$\overset{1}{h}_{ij}(r' > b, b|x) = G^2M^2 \begin{cases} \frac{1}{r^2}, \quad i = j = 0, \\ \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^2} - 4\frac{x_\alpha x_\beta}{r^4} - 4B_{\alpha\beta.}, \quad i = \alpha, j = \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \end{cases}$$

и аналогично для других s, $B_{\alpha\beta} = b\left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{3r^3} - \frac{x_\alpha x_\beta}{r^5}\right)$.

Вклады в $\overset{s}{h}_{ij}(a|x)$, $s = 1, 2, \cdots, q$ от диаграмм a получаются из формулы

$$\overset{s}{h}_{ij}(a|x) = \frac{1}{2}\int d^4x' D_+(x - x')\,\overset{s}{\bar{\tau}}_{ij}(x'). \tag{A15}$$

Здесь $\overset{s}{\bar{\tau}}_{ij} = \overset{s}{\tau}_{ij} - \frac{1}{2}\eta_{ij}\,\overset{s}{\tau}$. В нашем случае τ_{ij} даны в (9) в [1] и $\overset{s}{\bar{\tau}}_{ij}$ таковы:

$$\overset{1}{\bar{\tau}}_{ij} = \frac{1}{4}\,\overset{2}{\bar{\tau}}_{ij} = \frac{1}{2}\,\overset{3}{\bar{\tau}}_{ij} = \frac{1}{4}\,\overset{4}{\bar{\tau}}_{ij} = \overset{7}{\bar{\tau}}_{ij} = \overset{16}{\bar{\tau}}_{ij} = -4\eta_{ij}(\nabla\phi)^2, \quad \overset{9}{\bar{\tau}}_{ij} = 2\,\overset{12}{\bar{\tau}}_{ij} = 8(\delta_{ij} - \eta_{ij})(\nabla\phi)^2,$$

$$\overset{5}{\bar{\tau}}_{ij} = 4\,\overset{6}{\bar{\tau}}_{ij} = 2\,\overset{8}{\bar{\tau}}_{ij} = 2\,\overset{10}{\bar{\tau}}_{ij} = \overset{11}{\bar{\tau}}_{ij} = 4\,\overset{13}{\bar{\tau}}_{ij} = 4\,\overset{14}{\bar{\tau}}_{ij} = 4\,\overset{15}{\bar{\tau}}_{ij} = 16\phi_{,i}\phi_{,j} - 8\eta_{ij}(\nabla\phi)^2 \tag{A16}$$

и

$$\overset{a}{\bar{\tau}}_{ij} = 2\,\overset{b}{\bar{\tau}}_{ij} = 2\,\overset{c}{\bar{\tau}}_{ij} = \overset{d}{\bar{\tau}}_{ij} = 4\,\overset{e}{\bar{\tau}}_{ij} = 4\,\overset{p}{\bar{\tau}}_{ij} = -16\eta_{ij}\phi\phi_{,\alpha\alpha};$$

$$\overset{g}{\bar{\tau}}_{ij} = 2\,\overset{i}{\bar{\tau}}_{ij} = \overset{l}{\bar{\tau}}_{ij} = 2\,\overset{m}{\bar{\tau}}_{ij} = 8\phi\phi_{,\alpha\alpha}(\delta_{ij} - \eta_{ij});$$

$$\frac{1}{2}\,\overset{f}{\bar{\tau}}_{ij} = \overset{h}{\bar{\tau}}_{ij} = 2\,\overset{j}{\bar{\tau}}_{ij} = \frac{1}{2}\,\overset{k}{\bar{\tau}}_{ij} = \overset{n}{\bar{\tau}}_{ij} = 2\,\overset{o}{\bar{\tau}}_{ij} = 2\,\overset{q}{\bar{\tau}}_{ij} = 8\phi\phi_{,ij} - 4\eta_{ij}\phi\phi_{,\alpha\alpha}. \tag{A17}$$

Из (A15), где интегрирование ведётся по области с материей ($r' < b$), и из (A16) получим

$$\overset{1}{h}_{ij}(r' < b, a|x) = \frac{1}{4}\,\overset{2}{h}_{ij}(r' < b, a|x) = \frac{1}{2}\,\overset{3}{h}_{ij}(r' < b, a|x) = \frac{1}{4}\,\overset{4}{h}_{ij}(r' < b, a|x) =$$

$$= \overset{7}{h}_{ij}(r' < b, a|x) = \overset{16}{h}_{ij}(r' < b, a|x) = G^2M^2\begin{cases} \frac{2}{5}\frac{1}{br}, i = j = 0, \\ -\frac{2}{5}\frac{\delta_{\alpha\beta}}{br}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{A18}$$

$$\overset{5}{h}_{ij}(r' < b, a|x) = 4\,\overset{6}{h}_{ij}(r' < b, a|x) = 2\,\overset{8}{h}_{ij}(r' < b, a|x) = 2\,\overset{10}{h}_{ij}(r' < b, a|x) =$$

$$= \overset{11}{h}_{ij}(r' < b, a|x) = 4\,\overset{13}{h}_{ij}(r' < b, a|x) = 4\,\overset{14}{h}_{ij}(r' < b, a|x) = 4\,\overset{15}{h}_{ij}(r' < b, a|x) =$$

$$= G^2M^2\begin{cases} \frac{4}{5}\frac{1}{br}, \quad i = j = 0, \\ -\frac{4}{5}\frac{\delta_{\alpha\beta}}{br} - \frac{8}{35}B_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{A19}$$

$$\overset{9}{h}_{ij}(r' < b, a|x) = 2\,\overset{12}{h}_{ij}(r' < b, a|x) = G^2M^2\begin{cases} \frac{8}{5}\frac{1}{br}, \quad i = j = 0, \\ 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{A20}$$

Аналогично интегрируя в (A15) по области $r' > b$, получим

$$\overset{1}{h}_{ij}(r' > b, a|x) = \frac{1}{4}\,\overset{2}{h}_{ij}(r' > b, a|x) = \frac{1}{2}\,\overset{3}{h}_{ij}(r' > b, a|x) =$$

$$= \frac{1}{4}\,\overset{4}{h}_{ij}(r' > b, a|x) = \overset{7}{h}_{ij}(r' > b, a|x) =$$

$$=\overset{16}{h}_{ij}(r' > b, a|x) = G^2M^2 \begin{cases} 2\frac{1}{br} - \frac{1}{r^2}, & i = j = 0, \\ -2\frac{\delta_{\alpha\beta}}{br} + \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^2}, & \alpha, \beta = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{A21}$$

$$\overset{5}{h}_{ij}(r' > b, a|x) = 4\overset{6}{h}_{ij}(r' > b, a|x) = 2\overset{8}{h}_{ij}(r' > b, a|x) = 2\overset{10}{h}_{ij}(r' > b, a|x) =$$

$$=\overset{11}{h}_{ij}(r' > b, a|x) = 4\overset{13}{h}_{ij}(r' > b, a|x) = 4\overset{14}{h}_{ij}(r' > b, a|x) = 4\overset{15}{h}_{ij}(r' > b, a|x) =$$

$$= G^2M^2 \begin{cases} 4\frac{1}{br} - 2\frac{1}{r^2}, & i = j = 0, \\ -\frac{4}{3}\frac{\delta_{\alpha\beta}}{br} + 2\frac{x_\alpha x_\beta}{r^4} + \frac{8}{5}B_{\alpha\beta}, & \alpha, \beta = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{A22}$$

$$\overset{9}{h}_{ij}(r' > b, a|x) = 2\overset{12}{h}_{ij}(r' > b, a|x) = G^2M^2 \begin{cases} 8\frac{1}{br} - 4\frac{1}{r^2}, & i = j = 0, \\ 0, & \alpha, \beta = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{A23}$$

Далее обозначим

$$\overset{s}{h}_{ij}(a + 2b|x) =\overset{s}{h}_{ij}(a|x) + 2\overset{s}{h}_{ij}(b|x),$$

$$\overset{s}{h}_{ij}(a|x) =\overset{s}{h}_{ij}(r' < b, a|x)+\overset{s}{h}_{ij}(r' > b, a|x), \quad \overset{s}{h}_{ij}(b|x) =\overset{s}{h}_{ij}(r' < b, b|x)+\overset{s}{h}_{ij}(r' > b, b|x).$$

Результаты вычислений $\overset{s}{h}_{ij}(a + 2b|x)$ для $s = 1, 3. \cdots, 16$ даны в табл. 2.

Строка с $s = 1$ в табл. 2 означает

$$\overset{1}{h}_{ij}(a + 2b|x) = G^2M^2 \begin{cases} \frac{12}{5}\frac{1}{rb} + \frac{1}{r^2}, & i = j = 0, \\ -\frac{12}{5}\frac{1}{rb} + 3\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^2} - 8\frac{x_{\alpha\beta}}{r^4} - \frac{8\cdot 27}{35}B_{\alpha\beta.}, & i = \alpha, j = \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Что касается $\overset{s}{h}_{ij}(a + 2b|x)$, $s = a, b. \cdots q$, то их можно выразить через $s = 1, 2. \cdots q$:

$$\overset{a}{h}_{ij}(a + 2b|x) = -2\overset{4}{h}_{ij}(a + 2b|x), \quad \overset{b}{h}_{ij}(a + 2b|x) = -2\overset{3}{h}_{ij}(a + 2b|x), \quad \overset{c}{h}_{ij}(a + 2b|x) =$$

$$= -[\overset{3}{h}_{ij}(a + 2b|x)+\overset{11}{h}_{ij}(a + 2b|x)], \quad \overset{d}{h}_{ij}(a + 2b|x) = -[\overset{2}{h}_{ij}(a + 2b|x)+\overset{9}{h}_{ij}(a + 2b|x)],$$

$$\overset{e}{h}_{ij}(a+2b|x) = -[\overset{1}{h}_{ij}(a+2b|x)+\overset{8}{h}_{ij}(a+2b|x)], \quad \overset{f}{h}_{ij}(a+2b|x) = -[\overset{3}{h}_{ij}(a+2b|x)+\overset{11}{h}_{ij}(a+2b|x)],$$

$$\overset{g}{h}_{ij}(a+2b|x) = -[\overset{2}{h}_{ij}(a+2b|x)+\overset{9}{h}_{ij}(a+2b|x)], \quad \overset{h}{h}_{ij}(a+2b|x) = -[\overset{1}{h}_{ij}(a+2b|x)+\overset{8}{h}_{ij}(a+2b|x)],$$

$$\overset{i}{h}_{ij}(a+2b|x) = -[\overset{5}{h}_{ij}(a+2b|x)+\overset{12}{h}_{ij}(a+2b|x)], \quad \overset{j}{h}_{ij}(a+2b|x) = -[\overset{13}{h}_{ij}(a+2b|x)+\overset{15}{h}_{ij}(a+2b|x)],$$

$$\overset{k}{h}_{ij}(a + 2b|x) = -[\overset{5}{h}_{ij}(a + 2b|x)+\overset{12}{h}_{ij}(a + 2b|x)], \quad \overset{l}{h}_{ij}(a + 2b|x) = -2\overset{9}{h}_{ij}(a + 2b|x),$$

$$\overset{m}{h}_{ij}(a + 2b|x) = -2\overset{12}{h}_{ij}(a + 2b|x), \quad \overset{n}{h}_{ij}(a + 2b|x) = -[\overset{8}{h}_{ij}(a + 2b|x)+\overset{10}{h}_{ij}(a + 2b|x)],$$

$$\overset{o}{h}_{ij}(a + 2b|x) = -[\overset{6}{h}_{ij}(a + 2b|x)+\overset{13}{h}_{ij}(a + 2b|x)], \quad \overset{p}{h}_{ij}(a + 2b|x) = -2\overset{7}{h}_{ij}(a + 2b|x),$$

$$\overset{q}{h}_{ij}(a + 2b|x) = -[\overset{6}{h}_{ij}(a + 2b|x)+\overset{13}{h}_{ij}(a + 2b|x)]. \tag{A24}$$

Т а б л и ц а 2

$\overset{s}{h}_{ij}\ (a+2b|x)$

s	$\frac{1}{rb}$	$\frac{1}{r^2}$	$\frac{\delta_{\alpha\beta}}{rb}$	$\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^2}$	$\frac{x_\alpha x_\beta}{r^4}$	$B_{\alpha\beta}$
1	$\frac{12}{5}$	1	$-\frac{12}{5}$	3	–8	$-\frac{8\cdot 27}{35}$
2	$\frac{48}{5}$	4	$-\frac{48}{5}$	4	0	0
3	$\frac{24}{5}$	2	$-\frac{24}{5}$	2	–8	$-\frac{8\cdot 27}{35}$
4	$\frac{48}{5}$	4	$-\frac{48}{5}$	–4	0	0
5	$\frac{24}{5}$	2	$-\frac{8}{5}$	0	2	$\frac{16\cdot 3}{35}$
6	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{32\cdot 3}{35}$
7	$\frac{12}{5}$	1	$-\frac{12}{5}$	–1	0	0
8	$\frac{12}{5}$	1	$-\frac{4}{5}$	0	–3	$-\frac{12}{5}$
9	$\frac{48}{5}$	4	0	–4	0	0
10	$\frac{12}{5}$	1	$-\frac{4}{5}$	0	–3	$-\frac{12}{5}$
11	$\frac{24}{5}$	2	$-\frac{8}{5}$	–4	2	$\frac{48}{35}$
12	$\frac{24}{5}$	2	0	2	–8	$-\frac{8\cdot 27}{35}$
13	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{32\cdot 3}{35}$
14	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{32\cdot 3}{35}$
15	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{32\cdot 3}{35}$
16	$\frac{12}{5}$	1	$-\frac{12}{5}$	3	–8	$-\frac{8\cdot 27}{35}$

Намёк на то, почему эти соотношения имеют место, даётся в формуле (25) в [1].

Наконец вклады от диаграмм b можно свести к вкладам от диаграмм a, см. ур. (33) в [1]:

$$\overset{1}{h}_{ij}\ (b|x) = -[\overset{8}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{h}{h}_{ij}\ (a|x)], \quad \overset{2}{h}_{ij}\ (b|x) = -[\overset{9}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{g}{h}_{ij}\ (a|x)],$$

$$\overset{3}{h}_{ij}\ (b|x) = -\frac{1}{2}[\overset{3}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{11}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{b}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{f}{h}_{ij}\ (a|x)],$$

$$\overset{4}{h}_{ij}\ (b|x) = -[\overset{4}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{a}{h}_{ij}\ (a|x)], \quad \overset{5}{h}_{ij}\ (b|x) = -[\overset{12}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{i}{h}_{ij}\ (a|x)],$$

$$\overset{6}{h}_{ij}\ (b|x) = -[\overset{13}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{q}{h}_{ij}\ (a|x)], \quad \overset{7}{h}_{ij}\ (b|x) = -[\overset{7}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{p}{h}_{ij}\ (a|x)],$$

$$\overset{8}{h}_{ij}\ (b|x) = -\frac{1}{2}[\overset{1}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{10}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{e}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{n}{h}_{ij}\ (a|x)],$$

$$\overset{9}{h}_{ij}\ (b|x) = -\frac{1}{2}[\overset{2}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{9}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{d}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{l}{h}_{ij}\ (a|x)],$$

$$\overset{10}{h}_{ij}\ (b|x) = -\frac{1}{2}[\overset{8}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{16}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{e}{h}_{ij}\ (a|x) + \overset{n}{h}_{ij}\ (a|x)],$$

$$\overset{11}{h}_{ij}(b|x) = -[\overset{3}{h}_{ij}(a|x) + \overset{c}{h}_{ij}(a|x)], \quad \overset{12}{h}_{ij}(b|x) = -\frac{1}{2}[\overset{5}{h}_{ij}(a|x) + \overset{12}{h}_{ij}(a|x) + \overset{k}{h}_{ij}(a|x) +$$

$$+\overset{m}{h}_{ij}(a|x)], \quad \overset{13}{h}_{ij}(b|x) = -\frac{1}{2}[\overset{6}{h}_{ij}(a|x) + \overset{15}{h}_{ij}(a|x) + \overset{j}{h}_{ij}(a|x) + \overset{o}{h}_{ij}(a|x)],$$

$$\overset{14}{h}_{ij}(b|x) = -[\overset{15}{h}_{ij}(a|x) + \overset{q}{h}_{ij}(a|x)], \quad \overset{15}{h}_{ij}(b|x) = -\frac{1}{2}[\overset{13}{h}_{ij}(a|x) + \overset{14}{j}_{ij}(a|x) + \overset{j}{h}_{ij}(a|x) + \overset{o}{h}_{ij}(a|x)],$$

$$\overset{16}{h}_{ij}(b|x) = -[\overset{10}{h}_{ij}(a|x) + \overset{h}{h}_{ij}(a|x)]. \tag{A25}$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] А. И. Никишов, ЭЧАЯ **37**, 776 (2006).

[2] Julian Schwinger, *Particle, Sources, and Fields* (Addison-Wesley Publishing Company, 1970).

[3] H. Dehnen, H. Honl, K. Westpfahl, Ann. der Phys. **6**(7-8), 370 (1960).

[4] А. И. Никишов, Краткие сообщения по физике ФИАН **44**(10), 17 (2017).

[5] А. И. Никишов, ЭЧАЯ **32**(1), 5 (2001); http://www1.jinr.ru/Archive/Pepan/v-32-1/1.htm.

Поступила в редакцию 10 июля 2018 г.