Краткие сообщения по физике № 11 1982

ОБ ОСТАТОЧНОМ ПРОИЗВОЛЕ КАЛИБРОВКИ $\partial^\mu A_\mu = 0$

А. Ф. Курчанов, В. Я. Файнберг

УДК 530.145

Рассмотрен вопрос, насколько полно фиксируется в квантовой хромодинамике в пространстве Минковского калибровка условием $\partial^\mu A^a_\mu = 0$. Показано, что введение калибровочного преобразующихся кварковых полей приводит к противоречию.

Рассмотрим вопрос: насколько полно в пространстве Минковского в КХД фиксируется калибровка условием $\partial^\mu A^a_\mu = 0$? Составим уравнение:

$$\partial^\mu A_\mu = \partial^\mu A^\Omega_\mu = 0, \quad A^\Omega_\mu = \Omega^{-1} A_\mu \Omega + i\Omega^{-1}\partial_\mu \Omega,$$

то есть:

$$i\partial^\mu(\partial_\mu \Omega)\Omega^{-1} + \left[A_\mu, (\partial^\mu \Omega)\Omega^{-1}\right] = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение имеет решение $\Omega = \Omega(\lambda_0(x), A)$, где $\lambda_0(x)$ – некоторые функции, которые мы можем задать произвольно. Если мы сделаем в вакуумном континуальном интеграле замену переменных с помощью этого преобразования, то все подинтегральное выражение останется инвариантным. Однако возникает якобиан преобразования:

$$J = \det \hat{J}, \quad \text{где} \quad \hat{J} = DA^{\Omega(\lambda, A)}/DA.$$

Если мы сумеем так определить $\Omega(\lambda, A)$, что $J = 1$, то мы достигнем своей цели, а именно, сумеем получить отсюда выводы о свойствах функций Грина. Имеем:

$$\hat{J} \equiv J^{ab}_{\mu\nu}(x,y) = \frac{D(A^{\Omega}_{\mu})^a(x)}{DA^b_{\nu}(y)} = \delta^{ab}\delta_{\mu\nu}\delta(x-y) + \Big\{\Big[A_\mu(x), \tag{2}$$

$$\frac{\delta\Omega(x)}{\delta A^b_\nu(y)}\,\Omega^{-1}(x)\Big] + i\,\frac{\delta}{\delta A^b_\nu(y)}\,(\partial_\mu\Omega(x))\Omega^{-1}(x)\Big\}^a.$$

Рассмотрим вначале упрощенные выражения, где $\Omega \equiv \exp(it^a\lambda^a) \approx 1$; то есть $\lambda^a \approx 0$, тогда:

$$\frac{\delta\Omega}{\delta A}\,\Omega^{-1} \to it^a\,\frac{\delta\lambda^a}{\delta A}, \quad (\partial_\mu\Omega)\Omega^{-1} \to it^a\partial_\mu\lambda^a.$$

Ищем решение в виде:

$$\lambda^a(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^a_n(x), \quad \text{где} \quad \lambda_0(x) = \lambda_0(\vec{x}) + x_0 p(\vec{x}),$$

$$\lambda^a_{n+1} = \int_0^{x_0} d\xi \int_0^{\xi} dt\,\Big\{\partial_\alpha\partial_\alpha\lambda^a_n - f^{abc}A^b_\mu\partial^\mu\lambda^c\Big\}(t,\vec{x}),$$

где $\lambda(0,\vec{x}) = \lambda_0(\vec{x})$ и $\partial_0\lambda(0,\vec{x}) = p(\vec{x})$. Пусть $R^{ab}_\nu(x,y) \equiv$ $\equiv \delta\lambda^a(x)/\delta A^b_\nu(y)$, тогда:

$$J^{ab}_{\mu\nu}(x,y) = \delta^{ab}\delta_{\mu\nu}\delta(x-y) - \partial^x_\mu R^{ab}_\nu(x,y) - f^{adc}A^d_\mu(x)R^{cb}_\nu(x,y);$$

$$\det\hat{J} = \exp\big[Sp(\hat{J}-1) + o(\hat{J}-1)\big].$$

В приближении малых λ нас будет интересовать $Sp(\hat{J}-1)$, то есть понадобятся выражения: $R^{ab}_\nu(x,x)$ и $C(x,y) \equiv \partial^x_0 R^{aa}(x,y)$. Пусть $R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n$, тогда ($R_n(x,y) = 0$ при $x_0 < y_0$):

$$R^{ab}_{\nu,n+1}(x,y) = \int_{y_0}^{x_0} d\xi \int_{y_0}^{\xi} dt\,\Big\{\partial_\alpha\partial_\alpha R^{ab}_{\nu,n} - f^{adc}A^d_\mu\partial^\mu R^{cb}_{\nu,n}\Big\} -$$

$$- f^{abc}(x_0 - y_0)\delta(\hat{\vec{x}} - \vec{y})\partial_\nu\lambda^c_n(y);$$

$$R_0 = 0, \quad R_1 \sim (x_0 - y_0), \ \ldots, \ R_n \sim (x_0 - y_0).$$

Следовательно, $R_n(x,x) \sim 0 \cdot \delta^{(3)}(0)$ – неопределенное выражение.

$$C_{n+1}(x,y) = \int\limits_{y_0}^{x_0} dt \left\{\partial_\alpha\partial_\alpha R^{aa}_{0,n} - f^{adc}(A^d_0\partial_0 R^{ca}_{0,n} - A^d_\alpha\partial_\alpha R^{ca}_{0,n})\right\},$$

то есть $C_0 = 0, \ \ldots, \ C_n \sim (x_0 - y_0)$, и здесь опять возникает выражение типа $0 \cdot \delta^{(3)}(0)$. Поэтому необходимо ввести дискретную решетку с шагом Δ. Тогда $\delta^{(3)}(0) = \Delta^{-3} < \infty$, и, если мы оставляем время непрерывной величиной, то имеем сразу: $Sp(\hat{J} - 1) = 0$. Если же мы вводим по времени шаг Δ, то можем так задать решение, что опять получим $Sp(\hat{J} - 1) = 0$. Итак, при малых λ мы получили $J = 1$. Следует заметить, что другое определение λ, например: $\tilde{\lambda}(x) = \lambda(x)F(A)$, где $F(A)$ – некоторый произвольный функционал, приводит в общем случае к $J \neq 1$. Преобразования с $J = 1$ образуют группу. Эта группа непрерывна и может быть параметризована с помощью $\lambda_0(\vec{x})$ и $p(\vec{x})$.

Пусть теперь малость λ характеризуется большим числом N, т.е. $\lambda_0(\vec{x})$ и $p(\vec{x}) \sim 1/N$, а соответствующее преобразование обозначим $\Omega_N(A)$. Любое конечное калибровочное преобразование Ω, удовлетворяющее уравнению (I), можно записать в виде

$$\Omega = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{N} \Omega_N(A_i), \tag{3}$$

где $A_{i+1} = A_i^{\Omega_N(A_i)}$, $A_1 = A$. Для детерминанта J из (2) и (3) имеем:

$$\det \hat{J} = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{N} \det \hat{J}_N(A_i), \tag{4}$$

$$\hat{J}_N = 1 + o(1/N,\ A_i). \qquad (4)$$

Поскольку $A_{i+1} = A_i + O(1/N)$, из формулы (4) находим:

$$\det \hat{J} = \lim_{N\to\infty}\left[\det \hat{J}_N(A)\right]^N = \lim_{N\to\infty} \exp\left[N \;\mathrm{Sp}\; \ln \hat{J}_N(A)\right] = 1,$$

т.к. $\mathrm{Sp}(\hat{J}_N - 1) = 0$, что и требовалось доказать.

Итак, мы можем теперь не ограничиваться малыми λ. Рассмотрим функцию Грина кварка. Из существования только что найденного калибровочного произвола следует:

$$\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle_{x_0=y_0} = \langle 0|e^{i\lambda(x)}\psi(x)\bar{\psi}(y)e^{-i\lambda(y)}|0\rangle = 0.$$

Из требований релятивистской инвариантности получим $\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = 0$ при $(x-y)^2 < 0$, и, благодаря аналитическим свойствам, $\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = 0$ при $x \neq y$. Аналогично можно доказать равенство нулю всех функций Грина кварков вплоть до 4-хвостки (по теореме Бергмана - Холла - Уайтмана /I/).

Таким образом, ковариантные калибровки типа $\partial^\mu A_\mu = 0$ не фиксируют калибровку и приводят к удержанию, т.е. к противоречию с теорией возмущений. Существование ковариантных калибровок, обладающих гораздо меньшим остаточным произволом, обсуждалось в работе Хуфта /2/. Подчеркнем, что речь в этой заметке шла о неоднозначностях, не связанных с обнаруженными Грибовым /3/; найденные нами неопределенности имеют функциональный произвол и, в частности, означают, что соответствующий детерминант /4/, вычисленный не по теории возмущений вблизи единичного элемента, обращается в нуль. В другой статье мы дадим более полное изложение этих вопросов.

Поступила в редакцию
21 июня 1982 г.

Литература

I. Р. Стритер, А. Вайтман, "PCT", спин статистика и все такое, "Наука", М., 1966 г.

2. G. 't Hooft, Nuclear Physics, B190, 455 (1981).
3. V. Gribov, Nucl. Phys., B139, 1 (1978); I. Singer, Comm. Math. Phys., 60, 7 (1978).
4. L. Faddeev, V. Popov, Phys. Lett., 25B, 30 (1967).