Краткие сообщения по физике № 12 1982

О СВЯЗИ МЕЖДУ УРАВНЕНИЯМИ ПЕНЛЕВЕ И ИНТЕГРИРУЕМЫМИ ЭВОЛЮЦИОННЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

В. А. Андреев

УДК 517.946.4

В работе развивается подход к уравнениям Пенлеве как к условиям совместности двух линейных систем. Получена их связь с уравнениями, интегрируемыми методом обратной задачи.

В настоящее время большой интерес вызывают уравнения Пенлеве /I/. Они возникают в методе обратной задачи рассеяния как уравнения для автомодельных решений нелинейных эволюционных уравнений /2/, а также в задаче о сохранении монодромии обыкновенных дифференциальных уравнений /3,4/. Связь между этими двумя задачами уже отмечалась в /3/, в частности, между модифицированным уравнением Кортевега – де Вриза и уравнением Пенлеве II. В настоящей работе в общем виде найдена связь между преобразованиями, сохраняющими монодромию, и нелинейными дифференциальными уравнениями, возникающими в подходе Абловица.

В этом подходе нелинейные уравнения возникают как условия совместности двух линейных систем /5/

$$\psi_x = G\psi, \quad \psi_t = F\psi \tag{I}$$

и имеют вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - G, \ \frac{\partial}{\partial t} - F\right] = 0.$$

Пусть

$$G = \begin{pmatrix} ik & q \\ r & -ik \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}.$$

В этом случае дифференциальные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} A_x &= Cq - Br, \\ q_t &= B_x + 2Aq - 2ikB, \\ r_t &= C_x - 2Ar + 2ikC. \end{aligned} \tag{2}$$

Модифицируя соотношения (I) можно обобщить уравнения (2). Запишем вместо (I) следующие уравнения /6/

$$\psi_x = G\psi, \quad \psi_t + ak\psi_k = (F + axG)\psi. \tag{3}$$

Уравнения совместности принимают вид

$$F_x + a(xG)_x - G_t - akG_k = [G,F]. \tag{4}$$

$$\begin{aligned} A_x &= Cq - Br, \\ q_t - a(xq)_x &= B_x + 2Aq - 2ikB, \\ r_t - a(xr)_x &= C_x - 2Ar + 2ikC. \end{aligned} \tag{5}$$

Системе (2) соответствовали эволюционные уравнения

$$\begin{aligned} q_t &= P(q, r, \ldots), \\ r_t &= S(q, r, \ldots). \end{aligned} \tag{6}$$

В случае системы (5) они переходят в уравнения

$$\begin{aligned} q_t - a(xq)_x &= P(q, r, \ldots), \\ r_t - a(xr)_x &= S(q, r, \ldots). \end{aligned} \tag{7}$$

Если $q = \alpha r$ или $q = \alpha r^*$, эти уравнения имеют смысл, но в случае $r = 1$ второе уравнение приводит к соотношению $0 = 1$. Поэтому в данном случае схему работы /6/ следует несколько дополнить, а именно: в матрице F произвести замену $A \to A + a/2$. В этом случае эволюционное уравнение принимает вид

$$q_t - aq_x - 2aq = P(q, q_x, \ldots). \tag{8}$$

В случае $r = 1$ формулы (6) дают уравнение Кортевега - де Вриза и его высшие аналоги. Выберем $P = 6qq_x + q_{xxx}$ и положим в формуле (8) $q_t = 0$. Получим стационарное уравнение

$$a(xq_x + 2q) + 6qq_x + q_{xxx} = 0. \tag{9}$$

Его можно получить, рассматривая автомодельные решения уравнения Кортевега - де Вриза,

$$\begin{gathered} u_t + u_{\xi\xi\xi} + 6uu_\xi = 0, \\ u = (3at)^{-2/3} q(\xi(3at)^{-1/3}). \end{gathered} \tag{10}$$

Таким образом, уравнение (9) можно получить рассматривая либо стационарные решения уравнения (8), либо автомодельные решения уравнения (10). Это же справедливо и для высших аналогов уравнения КдВ.

Стационарные уравнения типа (9) или (7) с $q_t = r_t = 0$ являются условиями совместности линейных систем

$$\psi_x = G\psi, \quad ak\psi_k = (F + axG)\psi \tag{11}$$

и называются уравнениями типа Пенлеве.

Преобразование $A \to A + a/2$ получается автоматически, если воспользоваться полученным в работе /7/ представлением для уравнения (9) ($a = 1$)

$$[L, \tilde{M}] = aL, \tag{12}$$

где

$$L = d^2/dx^2 + q,$$

$$\tilde{M} = \frac{4d^3}{dx^3} + (6u + \frac{1}{2}ax)\frac{d}{dx} + 3u_x = M + \frac{1}{2}ax\frac{d}{dx}.$$

Рассмотрим собственные функции оператора L

$$L\psi(x, \lambda) = \lambda\psi(x, \lambda).$$

На этих функциях соотношение (12) можно переписать в виде

$$\left[L - \lambda, \ -a\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} + \tilde{M}\right]\psi(x, \lambda) = 0.$$

Таким образом, уравнение (9) является условием совместности двух линейных уравнений

$$L\psi = \lambda\psi, \quad a\lambda \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \widetilde{M}\psi.$$

Если эти уравнения переписать в виде систем, используя обозначения $\psi_1 = \psi$, $\psi_2 = \psi_x$, то мы получим уравнения (II), записанные в другом базисе

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ \lambda - u & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix},$$

$$a\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_x & 4\lambda + 2u + \frac{1}{2}ax\\ (4\lambda + 2u + \frac{1}{2}ax)(\lambda - u) - u_{xx} & u_x + a/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}.$$

В общем случае аналогом уравнения (I2) для системы (7) служит матричное уравнение

$$\left[L,\ F + ax\frac{d}{dx}\right]\psi = aL\psi, \tag{I3}$$

где

$$L = \begin{pmatrix}\frac{d}{dx} & -q\\ -r & -\frac{d}{dx}\end{pmatrix}, \quad L\psi = i\lambda\psi.$$

В отличие от (I2), уравнение (I3) справедливо только на собственных функциях оператора L.

Поступила в редакцию
10 июня 1982 г.

Литература

1. В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, ГТТИ, М., 1950 г.

2. M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur, J. Math. Phys., 21, 715 (1980).
3. H. Flaschka, A. C. Newell, Comm. Math. Phys., 76, 65 (1980).
4. M. Jimbo, T. Miwa, K. Ueno, Physica, 2D, 306 (1981).
5. M. J. Ablowitz et al., Stud. App. Math., 53, 249 (1974).
6. A. C. Newell, Proc. Roy. Soc., London A, 365, 283 (1979).
7. H. Flaschka, J. Math. Phys., 21, 1016 (1980).