УДК 530.1

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП SU(N) НА ПОЛИНОМАХ ОТ АНТИКОММУТИРУЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Д. М. Гитман[1], А. Л. Шелепин

Антисимметричные представления групп $SU(N)$ строятся в пространствах полиномов фиксированной степени от N антикоммутирующих переменных. Рассматриваются базисы неприводимых представлений, ядра операторов и формулы их умножения. Обсуждается вопрос о построении соответствующих континуальных интегралов.

Как известно, неэквивалентные неприводимые представления (НП) групп $SU(N)$ однозначно задаются своей сигнатурой $[P_1...P_{N-1}]$ – набором из $N-1$ целого числа P_i. Особую роль играют так называемые фундаментальные НП [1] – представления с единственным, отличным от нуля, индексом сигнатуры. Сумма размерностей этих НП равна 2^N-2. Среди них мы найдем и два сопряженных друг другу представления размерности $N, T_{[10...0]}(g)$ и $T_{[0...01]}(g)$. Для группы $SU(2)$ в качестве индекса сигнатуры обычно используется $J = P/2$.

Представления $T_{[P0...0]}(g)$ (называемые также симметричными – их вектора получаются как *симметричная* часть P-кратного прямого произведения НП $T_{[10...0]}(g)$) могут быть построены в пространстве многочленов фиксированной степени P от комплексных переменных $z_a, a = 1,...N, \sum \bar{z}_a z_a = 1$. Симметричные НП хорошо изучены (см. [2, 3] и цитированную там литературу), для них построены ковариантные символы операторов и на этой основе различными авторами рассматривается соответствующий континуальный интеграл (см., например, [4 – 10]).

[1]Физический институт университета Сан-Паулу, Бразилия.

Вместе с тем, по НП групп $SU(N)$ могут преобразовываться волновые функции как бозонов, так и фермионов. Поэтому представляется естественным построение НП групп $SU(N)$ в пространствах функций как обычных, так и грассмановых переменных.

Фундаментальные НП $T_{[01...0]}(g), ..., T_{[0...1]}(g)$ получаются как *антисимметричная* часть $2, ..., N-1$-кратного прямого произведения НП $T_{[10...0]}(g)$ соответственно (при $K = N$ получим детерминант-инвариант группы). Ниже мы рассмотрим реализацию антисимметричных НП в пространстве многочленов фиксированной степени $K, 1 < K < N$, от комплексных грассмановых переменных $\eta_a, a = 1, ..., N$. Для лучшего понимания сходства и различия с аналогичными построениями для симметричных НП рассмотрение будет вестись параллельно для обоих типов НП.

Генераторы. Вместо "стандартных" генераторов $\hat{T}_\alpha, \alpha = 1, ..., N^2-1$ групп $SU(N)$ удобно использовать генераторы $\hat{T}^a_b, a, b = 1, ..., N$ (см., например, [1 – 3]), удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\hat{T}^a_b, \hat{T}^c_d] = \hat{T}^a_d \delta^c_b - \hat{T}^c_b \delta^c_b, \; (\hat{T}^a_b)^\dagger = \hat{T}^b_a. \tag{1}$$

Всего, очевидно, имеется N^2 генераторов $U(N) = SU(N) \oplus U(1)$, из них один – генератор $U(1) \hat{T} = \sum_{a=1}^N \hat{T}^a_a$ и N^2-1 генераторов $SU(N)$. Подробнее о свойствах этих генераторов см. [2].

Операторы $\hat{T}^a_b$ в фундаментальном N-мерном представлении $T_{[10...0]}$ могут быть реализованы $N \times N$ матрицами с матричными элементами $(T^a_b)^c_d = \delta_{ac}\delta_{bd}$. "Стандартные" генераторы $\hat{T}_\alpha$ являются линейными комбинациями $\hat{T}^a_b, \hat{T}_\alpha = (T_\alpha)^a_b \hat{T}^a_b$, где T_α – матрицы генераторов в фундаментальном НП (матрицы Паули для $SU(2)$, матрицы Гелл–Манна для $SU(3)$).

В фундаментальном НП произведение двух генераторов линейно выражается через генераторы:

$$\hat{T}^a_b \hat{T}^c_d = \hat{T}^a_d \delta^c_d. \tag{2}$$

Т.е., кроме коммутационных соотношений (1), общих для генераторов во всех представлениях, для фундаментальных N-мерных НП выполняются антикоммутационные соотношения

$$[\hat{T}^a_b, \hat{T}^c_d]_+ = \hat{T}^a_d \delta^c_b + \hat{T}^c_b \delta^c_b, \tag{3}$$

в то время как для произвольных НП групп Ли генераторы удовлетворяют лишь коммутационным соотношениям $[\hat{T}_a, \hat{T}_b] = if_{abc}\hat{T}_c$, а антикоммутатор уже не является линейной комбинацией генераторов.

Генераторы $SU(N)$ и бозонные операторы рождения и уничтожения. Рассмотрим операторы

$$\hat{T}_c^b = \hat{a}_b^\dagger \hat{a}_c\, [\hat{a}_c^\dagger, \hat{a}_d]_- = \delta_{cd}. \tag{4}$$

Используя коммутационные соотношения операторов рождения $\hat{a}^\dagger$ и уничтожения $\hat{a}$, нетрудно показать, что они удовлетворяют коммутационным соотношениям группы $U(N)$ (1). Эти операторы сохраняют $P = \sum_{a=1}^N n_a$, а следовательно, бесконечномерное пространство векторов $|n_1...n_N\rangle$, $n_a = 0, 1, ...$, относительно действия группы $U(N)$ распадается на прямую сумму симметричных представлений $T_{[P0...0]}(g)$. Представление (4) использовалось, в частности, для нахождения ковариантных символов операторов групп $SU(N)$ [2, 3]. Для "стандартных" генераторов имеем $\hat{T}_\alpha = (T_\alpha)_c^b \hat{a}_b^\dagger \hat{a}_c$.

Генераторы $SU(N)$ и фермионные операторы рождения и уничтожения. Рассмотрим операторы

$$\hat{T}_d^c = \hat{b}_c^\dagger \hat{b}_d,\ [\hat{b}_c^\dagger, \hat{b}_d]_+ = \delta_{cd}. \tag{5}$$

Используя антикоммутационные соотношения операторов рождения $\hat{b}^\dagger$ и уничтожения $\hat{b}$, нетрудно показать, что они удовлетворяют коммутационным соотношениям группы $U(N)$ (1). Пространство векторов состояний $|N_1...n_N\rangle$, $n = 0, 1$, очевидно, имеет размерность 2^N. Операторы (5) сохраняют $K = \sum_{a=1}^N n_a$, а следовательно, пространство векторов $|n_1...n_N\rangle$ относительно действия группы $U(N)$ распадается на прямую сумму $N+1$ НП, по числу возможных значений K. Это два $SU(N)$-инварианта $T_{[0...0]}(g)$ (вектора $|0...0\rangle$ и $|1...1\rangle$) и $N-1$ фундаментальных НП $SU(N)\, T_{[1...0]}(g), T_{[01...0]}(g), ..., T_{[0...1]}(g)$, отвечающих $K = 1, 2...N-1$.

Отметим, что формулы (4) и (5) дают реализацию представления алгебры Ли группы $U(N)$ в абстрактных пространствах бозонных или фермионных чисел заполнения. Обратимся теперь к реализациям представлений этих групп в пространствах обычных и грассмановых комплексных переменных.

Представления групп $SU(N)$ на полиномах от комплексных переменных. Симметричные НП $T_{[P0...0]}(g)$ групп $SU(N)$ могут быть реализованы на полиномах фиксированной степени P. Ниже, следуя в основном [2, 3], кратко рассмотрим основные соотношения для НП этого типа.

Определим действие группы $SU(N)$ в пространстве аналитических функций N комплексных переменных $\bar{z}_a$ формулой

$$\hat{T}(g)\psi(\bar{z}) = \psi(\bar{z}'),\ \bar{z}'_b = (g^{-1})^a_b \bar{z}_a, \tag{6}$$

где g – $N \times N$ матрица фундаментального НП. Очевидно, что преобразования (6) переводят полиномы фиксированной степени P в полиномы той же степени, и представление $T(g)$ распадается на НП $T_{[P0...0]}(g)$, $P = 0, 1, ...$ Это представления в пространстве $SU(N)/U(N-1)$ – комплексном проективном пространстве CP^{N-1} постоянной положительной кривизны $C = 4/P$ [3]. (Рассмотрение пространств CD^{N-1} постоянной отрицательной кривизны связано с некомпактными группами $SU(N,1)$ [11].)

Генераторы в пространстве аналитических функций действуют как дифференциальные операторы

$$\hat{T}^a_b = \bar{z}_a \partial_{\bar{z}_b}. \tag{7}$$

Скалярное произведение, инвариантное относительно действия группы, дается формулой

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int \overline{\psi_1(\bar{z})}\psi_2(\bar{z})d\mu_P(\bar{z},z),$$

$$d\mu_P(\bar{z},z) = \frac{(P+N-1)!}{(2\pi)^N P!}\delta\left(\sum_{k=1}^N |z_k|^2 - 1\right)\prod_{k=1}^N d\bar{z}_k dz_k. \tag{8}$$

Одночлены

$$(P!/k_1!...k_N!)^{1/2}\bar{z}_1^{k_1}...\bar{z}_N^{k_N},\ \sum k_i = P \tag{9}$$

образуют ортонормированный (относительно скалярного произведения (8)) базис в пространстве НП $T_{[P0...0]}(g)$. Предполагая, что (9) – волновая функция $\langle Pz|Pn\rangle$ состояний дискретного базиса $|Pn\rangle$ в некотором z-представлении, на основании (8) получим формулы для перекрытия состояний $\langle Pz|Pu\rangle$ и тождество разложения единицы:

$$\langle Pz|Pu\rangle = \left(\sum \bar{z}_i u_i\right)^P, \tag{10}$$

$$\hat{1} = \int |Pz\rangle\langle Pz|d\mu_P(\bar{z},z). \tag{11}$$

Фактически, рассматриваемое здесь z-представление – это не что иное, как представление когерентных состояний КС. Действительно, волновая функция КС, получаемая действием конечных преобразований на старший вес $\bar{z}_1^P$, $T(g)\bar{z}_1^P = (\sum \bar{z}_i u_i)^P$, где u_i – элементы первого столбца $N \times N$ матрицы g, совпадает с (10).

Для нахождения символов операторов удобно использовать формулу $\hat{a}_k|Pz\rangle = P^{1/2} z_k |P-1\, z\rangle$. Приведем здесь ковариантные символы операторов $\hat{T}_b^a$ и $\hat{T}_b^a \hat{T}_d^c$ в представлении $T_{[P0\ldots 0]}(g)$ [2]:

$$T_b^a(\bar{z}, z) = P\bar{z}_a z_b,\ (T_b^a \star T_d^c)(\bar{z}, z) = P(P-1)\bar{z}_a \bar{z}_c z_b z_d + P\delta_b^c \bar{z}_a z_d \tag{12}$$

$$T_b^a(\bar{u}, z) = P\bar{u}_a z_b (\sum \bar{z}_k u_k)^{-1},$$

$$(T_b^a \star T_d^c)(\bar{u}, z) = P(P-1)\bar{u}_a \bar{u}_c z_b z_d (\sum \bar{z}_k u_k)^{-2} + P\delta_b^c \bar{u}_a z_d (\sum \bar{z}_k u_k)^{-1}. \tag{13}$$

Наряду с ковариантным символом удобно использовать ядро оператора $\tilde{A}(\bar{u}, v) = \langle Pu|\tilde{A}|Pv\rangle = A(\bar{u}, v)(\sum \bar{u}_k v_k)^P$. Разложение единицы (11) позволяет записать действие оператора на вектор и закон композиции ковариантных символов

$$(\tilde{A}f)(\bar{z}) = \int (\sum \bar{z}u)^P A(\bar{z}, u) f(\bar{u}) d\mu_P(\bar{u}, u), \tag{14}$$

$$(A_1 \star A_2)(\bar{u}, z)(\sum \bar{u}z)^P = \int A(\bar{u}, v) A(\bar{v}, z)(\sum \bar{u}v)^P (\sum \bar{v}z)^P d\mu_P(\bar{u}, u), \tag{15}$$

где $(\sum \bar{z}u)^P = \langle Pz|Pu\rangle$ – перекрытие КС. Последние две формулы являются основными при построении континуального интеграла для симметричных НП групп $SU(N)$.

Представления групп $SU(N)$ на полиномах от грассмановых переменных. Рассмотрим 2^N-мерное пространство аналитических функций N комплексных грассмановых переменных $\bar{\eta}_k$. Определим действие группы $SU(N)$ в этом пространстве формулой

$$\hat{T}(g)\psi(\bar{\eta}) = \psi(\bar{\eta}'),\ \bar{\eta}_b' = (g^{-1})_b^a \bar{\eta}_a'. \tag{16}$$

Преобразования (16) переводят полиномы фиксированной степени K в полиномы той же степени, и представление $T(g)$ размерности 2^N является приводимым. Оно распадается на $N+1$ НП на полиномах степени $K = 0, 1, ..., N$ размерности $C_N^K = \frac{N!}{K!(N-K)!}$. Мономы $\eta_{n1} \ldots \eta_{nK}$ при фиксированном K, очевидно, образуют дискретный базис соответствующего НП.

Генераторы в пространстве аналитических функций грассмановых переменных действуют как дифференциальные операторы

$$\hat{T}_b^a = \bar{\eta}_a \partial_{\bar{\eta} b}, \tag{17}$$

подобно генераторам (7), действующим в пространстве аналитических функций обычных комплексных переменных $\bar{z}_a$. (Фактически мы имеем здесь реализацию генераторов как билинейных комбинаций фермионных операторов рождения и уничтожения, $\hat{T}^a_b = a^\dagger_a a_b$.)

Скалярное произведение в пространстве полиномов степени K, инвариантное относительно преобразований (16), может быть задано формулой

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int \overline{\psi_1(\bar{\eta})}\psi_2(\bar{\eta})d\mu_K(\bar{\eta},\eta),\ d\mu_K(\bar{\eta},\eta) = \frac{1}{K!}(\sum d\bar{\eta}_i d\eta_i)^K. \tag{18}$$

Прямым вычислением нетрудно установить, что вектора дискретного базиса $\psi_n(\eta) = \bar{\eta}_{n1}...\bar{\eta}_{n_K}$ образуют ортонормированный набор относительно скалярного произведения (18),

$$\int \overline{\psi_n(\bar{\eta})}\psi_{n'}(\bar{\eta})d\mu_K(\bar{\eta},\eta) = \delta_{nn'}. \tag{19}$$

Обозначим состояния дискретного базиса как $|Kn_1...n_N\rangle$, $K = \sum n_i$ или сокращенно $|Kn\rangle$.

Предположим теперь, что существуют состояния $|K\xi_1...\xi_N\rangle$ (или сокращенно $|K\xi\rangle$) такие, что $\psi_n(\bar{\xi}) = \langle K\xi|Kn\rangle$. Это означает, что разрешены линейные комбинации векторов дискретного базиса не только с обычными комплексными, но и с грассмановыми коэффициентами

$$|K\xi\rangle + \sum\langle Kn|K\xi\rangle|Kn\rangle = \sum \xi_N^{n_N}...\xi_1^{n_1}|Kn\rangle.$$

Соотношение (19) запишется как $\int\langle Kn|K\eta\rangle\langle K\eta|Kn'\rangle d\mu_K(\bar{\eta},\eta) = \delta_{nn'}$, а функция

$$\langle K\xi|K\eta\rangle = \sum_n\langle K\xi|Kn\rangle\langle Kn|K\eta\rangle = (\sum\bar{\xi}_i\eta_i)^K/K!,$$

где суммирование ведется при фиксированном K, является воспроизводящим ядром в пространстве полиномов степени K,

$$\psi(\bar{\xi}) = \int\frac{(\sum\bar{\xi}_i\eta_i)^K}{K!}\psi(\bar{\eta})d\mu_K(\bar{\eta},\eta). \tag{20}$$

В этом отношении функция $\langle K\xi|K\eta\rangle$ для антисимметричных представлений групп $SU(N)$ играет ту же роль, что и перекрытие КС (10) для симметричных. Определяя $\langle K\eta|\psi\rangle = \sum_n\langle K\eta|Kn\rangle\langle Kn|\psi\rangle$ как следствие соотношения (19), получим $\int\langle\psi_1|K\eta\rangle\langle K\eta|\psi_2\rangle d\mu_K(\bar{\eta},\eta) = \sum\langle\psi_1|Kn\rangle\langle Kn|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle$ и, следовательно, можно записать тождество разложения единицы:

$$\hat{1} = \int |K\eta\rangle\langle K\eta| d\mu_K(\bar{\eta}, \eta). \tag{21}$$

Определим ядро оператора $\hat{A}$ формулой

$$\tilde{A}(\bar{\xi}, \eta) = \langle K\xi|\hat{A}|K\eta\rangle. \tag{22}$$

Используя формулу $\hat{a}_i|K\eta\rangle = \eta_i|K-1\,\eta\rangle$ и соотношение $\hat{a}_a^\dagger\hat{a}_b\hat{a}_c^\dagger\hat{a}_d = -\hat{a}_a^\dagger\hat{a}_c^\dagger\hat{a}_b\hat{a}_d + \delta_{bc}\hat{a}_a^\dagger\hat{a}_d$, для ядер линейных и квадратичных по генераторам операторов получим при $K > 1$

$$\tilde{T}_b^a(\bar{\eta}, \eta) = \bar{\eta}_a\eta_b(\sum \bar{\eta}_i\eta_i)^{K-1},\ (\tilde{T}_b^a \star \tilde{T}_d^c)(\bar{\eta}, \eta) = \delta_b^c\bar{\eta}_a\eta_d(\sum \bar{\eta}_i\eta_i)^{K-1} - \bar{\eta}_a\bar{\eta}_c\eta_b\eta_d(\sum \bar{\eta}_i\eta_i)^{K-2}. \tag{23}$$

При $K = 1$ выражения упрощаются:

$$\tilde{T}_b^a(\bar{\eta}, \eta) = \bar{\eta}_a\eta_b,\ (\tilde{T}_b^a \star \tilde{T}_d^c)(\bar{\eta}, \eta) = \delta_b^c\bar{\eta}_a\eta_d. \tag{24}$$

Для действия оператора на состояние и ядра произведения операторов получим

$$\psi(\bar{\xi}) = \int \tilde{A}(\bar{\xi}, \eta)\psi(\bar{\eta})d\mu_P(\bar{\eta}, \eta), \tag{25}$$

$$(\tilde{A}_1 \star \tilde{A}_2)(\bar{\xi}, \xi) = \int \tilde{A}_1(\bar{\xi}, \eta)\tilde{A}_2(\bar{\eta}, \xi)d\mu_P(\bar{\eta}, \eta). \tag{26}$$

Однако при попытке стандартным образом определить ковариантный символ оператора как отношение ядра оператора к воспроизводящему ядру, $A(\bar{\xi}, \eta) = \tilde{A}(\bar{\xi}, \eta)\langle K\xi|K\eta\rangle^{-1}$, мы встретимся с трудностями, связанными с необходимостью корректного определения элемента грассмановой алгебры, обратного к $\langle K\xi|K\eta\rangle$.

Когерентные состояния для антисимметричных НП. Подействуем на старший вес $\bar{\eta}_1 ... \bar{\eta}_K$ оператором конечных преобразований $T(g)$,

$$|Kz\rangle = T(g)\bar{\eta}_1...\bar{\eta}_K = (\sum z_{1_i}\bar{\eta}_i)...(\sum z_{Ki}\bar{\eta}_i),$$

где z_{ni} – элементы n-й строки матрицы конечных преобразований $g = \|z_{ik}\|$. Если раскрыть скобки, то нетрудно убедиться, что коэффициенты перед $\bar{\eta}_{n_1}...\bar{\eta}_{n_K}$ представляют собой определители $K \times K$, составленные из элементов z_{ik}. В частности, при $K = N$ получим инвариант $\det g\, \bar{\eta}_{n_1}...\bar{\eta}_{n_N} = \bar{\eta}_{n_1}...\bar{\eta}_{n_N}$, а при $K = N-1$ $|Kz\rangle = \sum_n(\tilde{z}_n \prod_{i\neq n} \bar{\eta}_i)$, где $\tilde{z}_n$ – минор элемента z_{Kn}. КС параметризуются точками соответствующих однородных пространств – $SU(N)/S(U(N-K) \otimes U(K))$.

N-мерным *одночастичным представлениям* $T_{[1...0]}(g)$ отвечают линейные однородные функции N антикоммутирующих переменных $\bar{\eta}$. Дискретный базис образуют $\eta_1, ..., \eta_N$, а N-компонентным столбцам $(z_1...z_N)^T$, преобразующимся по фундаментальному НП, отвечает линейная функция грассмановых переменных

$$\psi(\bar{\eta}) = \langle K\eta|Kz\rangle = (z_1\bar{\eta}_1 + ... + z_N\bar{\eta}_N). \tag{27}$$

Как нетрудно убедиться непосредственным вычислением по формуле (18), скалярное произведение векторов вида (27) совпадает с обычным скалярным произведением в пространстве столбцов,

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \sum \bar{z}_i u_i.$$

Континуальный интеграл: два подхода. Предположим, оператор эволюции

$$\hat{U}(t_n|t_0) = \hat{U}(t_n|t_{n-1})...\hat{U}(t_1|t_0) \tag{28}$$

является функцией от генераторов группы $SU(N)$. В этом случае эволюция состояния, принадлежащего некоторому НП группы, может быть описана с помощью соответствующего континуального интеграла.

Для симметричных НП групп $SU(N)$ возможны два подхода к построению континуальных интегралов:

1. Использование КС и символов операторов для данного фиксированного НП группы $SU(N)$. Соответствующие формулы получаются при вставлении тождества разложения единицы в данном НП между соседними операторами $\hat{U}$ в (28) или непосредственном использовании соотношений (14, 15) для символов оператора эволюции. Интегралы этого типа строятся в работах [4 – 10].

2. Пространство полиномов фиксированной степени очевидным образом образует подпространство в пространстве аналитических функций, а генераторы $SU(N)$ являются билинейными комбинациями операторов $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$. Поэтому можно использовать это более широкое пространство и хорошо развитый вычислительный аппарат группы Гейзенберга–Вейля, с которыми связана обычная конструкция континуального интеграла.

Оба подхода имеют как достоинства, так и недостатки. К преимуществам второго подхода можно отнести стандартный вид континуального интеграла, вычисления (в силу использования более широкого пространства) годятся сразу для всех симметричных представлений. Недостатки являются продолжением последнего достоинства: интегрирование ведется не по фазовому пространству классической системы $\sum |z_i|^2 = 1$, а по всем возможным значениям z_i. Не видны характерные особенности конкретных НП; в частности, затруднено исследование классического предела.

В случае антисимметричных НП и соответственно грассмановых переменных первый подход связан с решением упомянутых выше трудностей с определением ковариантных символов операторов.

Вместе с тем, полиномы фиксированной степени K от грассмановых переменных образуют подпространство в пространстве аналитических функций со скалярным произведением

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int \psi_1(\eta) \psi_2(\bar{\eta}) e^{-\sum \bar{\eta}\eta} \prod d\bar{\eta} d\eta. \tag{29}$$

Поэтому для нахождения действия операторов на вектора $\psi(\bar{\eta})$ мы можем использовать известные формулы [12, 13]

$$(\tilde{A}f)(\bar{\eta}) = \int \tilde{A}(\bar{\eta}, \xi) f(\bar{\xi}) e^{-\sum \bar{\xi}\xi} \prod d\bar{\xi} d\xi,$$

$$(\tilde{A}_1 \tilde{A}_2)(\bar{\eta}, \xi) = \int \tilde{A}_1(\bar{\eta}, \alpha) \tilde{A}_2(\bar{\alpha}, \xi) e^{-\sum \bar{\alpha}\alpha} \prod d\bar{\alpha} d\alpha,$$

где $\tilde{A}(\bar{\eta}, \xi)$ – ядро оператора, связанное с нормальным символом $A(\bar{\eta}, \xi)$ соотношением $\tilde{A}(\bar{\eta}, \xi) = A(\bar{\eta}, \xi) e^{\bar{\eta}\xi}$. Использование этих формул приводит к построению стандартного интеграла по антикоммутирующим переменным.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б а р у т А., Р о н ч к а Р. Теория представлений групп и ее приложения. М., Мир, 1980.

[2] Г и т м а н Д. М., Х а р ч е в С. М., Ш е л е п и н А. Л. Труды ФИАН, **26**, 95 (1990).

[3] G i t m a n D. M. and S h e l e p i n A. L. J. Phys. A: Math. Gen., **26**, 313 (1993).

[4] K l a u d e r J. R. Phys. Rev., **12D**, 2349 (1979).

[5] Н о в и к о в Л. Ф. ТМФ, **30**, 218 (1977); **54**, 193 (1983).

[6] K u r a t s u j i H. and S u z u k i T. J. Math. Phys., **21**, 472 (1980).

[7] Г о р о х о в А. В. Теоретико-групповые методы в физике., М., Наука, **1**, 249 (1980).

[8] F e n g D. H. and G i l m o r R. Phys. Lett., **90B**, 327 (1980).

[9] I n o m a t a A., K u r a t s u j i H., and G e r r y C. C. Path Integrals and Coherent States of $SU(2)$ and $SU(1,1)$. Singapore, World Scientific, 1992.

[10] Г о р о х о в А. В. Теоретико-групповые методы в физике. Труды третьего семинара, М., Наука, **2**, 399 (1986).

[11] G i t m a n D. M. and S h e l e p i n A. L. J. Phys. A: Math. Gen., **26**, 7003 (1993).

[12] Б е р е з и н Ф. А. Метод вторичного квантования. М., Наука, 1986.

[13] С л а в н о в А. А., Ф а д д е е в Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М., Наука, 1988.

Поступила в редакцию 13 июля 1998 г.