Краткие сообщения по физике № 1 · 1981

УСИЛЕНИЕ ПОЛЯ ПРИ ПОЛНОМ ВНУТРЕННЕМ ОТРАЖЕНИИ ОТ ГРАНУЛИРОВАННОЙ АКТИВНОЙ СРЕДЫ

А. В. Степанов, А. В. Шелагин

УДК 535 3 : 621.375.826

В приближении скалярного волнового уравнения исследована структура поля излучения в гранулированной активной среде. Получены выражения для потоков излучения, уходящего в глубь активной среды и отраженного от такой среды при ПВО. Показано, что эффект усиления отраженной волны исчезает при неограниченном росте инверсной заселенности.

1. В ряде работот /1-4/ теоретически исследовалось усиление электромагнитной волны при полном внутреннем отражении (ПВО) от активной среды. Предполагалось, что область инверсной заселенности (I), граничащая с однородной прозрачной средой (II), обладает плоскослоистой структурой. В настоящей работе мы рассмотрим задачу об усилении поля при ПВО от области с отрицательным поглощением, когда активное вещество распределено там вблизи границы раздела в виде редко расположенных сферических гранул (примесей). Радиус гранул r_0 будем полагать малым по сравнению с длиной волны излучения в среде (I) $\lambda_I = 2\pi/k_I$. Положим концентрацию примесей достаточно низкой, чтобы можно было пренебречь изменением показателя преломления $n = n_I/n_{II}$ при их внедрении. Активное вещество примеси будем характеризовать диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = \mathrm{Re}\,\varepsilon_1 + i\,\mathrm{Im}\,\varepsilon_1$, $\mathrm{Im}\,\varepsilon_1 < 0$; магнитная проницаемость $\mu = 1$. Будем искать J_z – поток излучения через плоскость, параллельную границе раздела активной среды (I) ($z < 0$) и среды (II)($z > 0$). Затравочная волна падает из среды (II), причем угол падения Θ превышает критический угол Θ_0, при котором наступает ПВО от среды (I) без примесей.

Неоднородные волны, возбужденные в среде (I), при взаимодействии с примесью частично трансформируются в однородные волны, распространяющиеся в этой среде. Вторичное поле можно представить в виде суммы двух слагаемых. Во-первых, это волны, рассеянные примесью. Такие волны возбуждаются и при внедрении неактивной примеси ($\mathrm{Im}\,\varepsilon_1 = 0$). Вторая часть, пропорциональная $\mathrm{Im}\,\varepsilon_1$, существует только при внедрении гранул вещества с отрицательным поглощением. При низкой концентрации примесей можно пренебречь многократным взаимодействием излучения с примесями и их вклады в поток излучения учитывать в некогерентном приближении. Чтобы избежать громоздких выкладок мы ограничимся рассмотрением скалярного волнового уравнения. Такое приближение представляется достаточным для получения оценок интегрального потока поля $E(\vec{r})$ без анализа углового распределения и поляризации излучения.

2. Волновое уравнение, которому удовлетворяет поле $E(\vec{r})$, запишем в виде:

$$\left[\nabla^2 + k^2(\vec{r}) + \hat{\varepsilon}_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}_1)\right] E(\vec{r}) = 0. \qquad (I)$$

Здесь

$$k^2(\vec{r}) = \begin{cases} k^2 = k_0^2 n_{II}^2, & z > 0, \\ k_1^2 = k_0^2 n_I^2 = k^2 n^2, & z < 0, \end{cases} \qquad (2)$$

и $\hat{\varepsilon}_1 = k_0^2 \varepsilon_1 v_0 n_{II}^2$, $v_0 = (4\pi/3) r_0^3$ — объем примеси; $k_0 = \omega/c$.

Слагаемое $\hat{\varepsilon}_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}_1)$ описывает действие малой гранулы активного вещества, расположенной в точке $\vec{r}_1$ ($z_1 < 0$). Решение этого уравнения представляет собой сумму затравочного поля $E_0(\vec{r})$ и вторичного поля $E'(\vec{r}) = t_1 \Gamma_0(\vec{r}|\vec{r}_1) E_0(\vec{r}_1)$, то есть

$$E(\vec{r}) = E_0(\vec{r}) + t_1 \Gamma_0(\vec{r}|\vec{r}_1) E_0(\vec{r}_1). \qquad (3)$$

Здесь $\Gamma_0(\vec{r}|\vec{r}_1)$ – функция Грина невозмущенного волнового уравнения, т.е. решение уравнения

$$\left[\nabla^2 + k^2(\vec{r})\right]\Gamma_0(\vec{r}|\vec{r}_1) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_1), \qquad (4)$$

содержащее при $|\vec{r} - \vec{r}_1| \to \infty$ расходящуюся волну. Величина t_1, характеризующая действие примеси, имеет вид:

$$t_1 = \frac{\hat{\varepsilon}_1}{1 - \hat{\varepsilon}_1\Gamma_0(\vec{r}_1|\vec{r}_1)} = \frac{\tau_1}{1 - \tau_1\hat{V}G(\vec{r}_1|\vec{r}_1)}, \qquad (5)$$

где $\tau_1 = \hat{\varepsilon}_1\left[1 - \hat{\varepsilon}_1 G_0(\vec{r}_1|\vec{r}_1)\right]^{-1}$ описывает действие примеси, помещенной в неограниченную однородную среду. Величина τ_1 выступает в известных выражениях для показателя преломления гранулированной среды /5/. Символом $\hat{V}G(\vec{r}_1|\vec{r}_1)$ обозначено поле в точке $\vec{r}_1$, испущенное источником, расположенным в той же точке и отраженное от границы раздела двух сред (I) и (II); $G_0(\vec{r}|\vec{r}_1) = (4\pi|\vec{r} - \vec{r}_1|)^{-1}\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}_1|)$. Функции $G_0(\vec{r}|\vec{r}_1)$ и $\Gamma_0(\vec{r}|\vec{r}_1)$ следует доопределить при $\vec{r} = \vec{r}_1$. Будем полагать $\mathrm{Re}\Gamma_0(\vec{r}_1|\vec{r}_1) \approx \mathrm{Re}G_0(\vec{r}_1|\vec{r}_1) \approx 1/4\pi r_0$. Мнимые части этих функций несингулярны и их можно вычислить (см. ниже).

Поток J_z можно представить в виде суммы трех компонентов. Во-первых, это поток затравочного поля $E_0(\vec{r})$:

$$J_{1z} = \frac{i}{2}\,\frac{c}{8\pi k n_{II}}\iint dxdy\left[E_0(\vec{r})\,\frac{d}{dz}\,E_0^*(\vec{r}) - \text{к.с.}\right]. \qquad (6)$$

В частности, отраженный поток $(z > 0)$

$$J_{1z} = \frac{c}{8\pi n_{II}}\,S|Q|^2\cos\theta, \qquad (7)$$

где Q – амплитуда падающей плоской волны, S – площадь облученной поверхности.

Во-вторых, это поток вторичного поля $E'(\vec{r})$:

$$J_{2z} = \frac{i}{2}\frac{c}{8\pi k n_{II}}|t_1|^2 |E_0(\vec{r}_1)|^2 \iint dxdy \left[\Gamma_0(\vec{r}|\vec{r}_1)\frac{d}{dz}\Gamma_0^*(\vec{r}|\vec{r}_1) - \text{к.с.}\right]. \tag{8}$$

Наконец, есть вклад, обусловленный интерференцией $E_0(\vec{r})$ и $E'(\vec{r})$:

$$J_{3z} = 2\mathrm{Re}\left\{\frac{i}{2}\frac{c}{8\pi k n_{II}} \times \right. \tag{9}$$

$$\left. \times\, t_1 E_0(\vec{r}_1)\iint dxdy\left[\Gamma_0(\vec{r}|\vec{r}_1)\frac{d}{dz}E_0^*(\vec{r}) - E_0^*(\vec{r})\frac{d}{dz}\Gamma_0(\vec{r}|\vec{r}_1)\right]\right\}.$$

3. Для вычисления интегралов удобно воспользоваться известным представлением функции $\Gamma_0(\vec{r}|\vec{r}_1)$ в виде двумерного разложения по плоским волнам (см., например, /6/). В результате получим следующее выражение для коэффициента отражения от такой среды с одной примесью:

$$R \equiv \frac{J_{z+}}{J_{zo}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3} J_{zi}}{J_{zo}} = 1 + \frac{2\cos\theta}{\pi S(1-n^2)}\exp(2kz_1\sqrt{\sin^2\theta - n^2})\times \tag{10}$$

$$\times\left\{|t|^2\left[\int\limits_{\sqrt{1-n^2}}^{1}\frac{y^2dy}{(y+\sqrt{n^2-1+y^2})^2} + \frac{1}{1-n^2}\int\limits_0^{\sqrt{1-n^2}} y^2\exp(2kz_1\sqrt{1-n^2-y^2})dy\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{2\pi}{k}\,\mathrm{Im}\,t_1\right\}.$$

Слагаемое $\sim \mathrm{Im}\,t_1$ обусловлено интерференцией полей $E_0(\vec{r})$ и $E'(\vec{r})$. Это слагаемое отсутствует в выражении для потока, уходящего в среду:

$$J_{z-} = -J_{z+}\frac{2\cos\theta}{\pi S n(1-n^2)}|t_1|^2\exp(2kz_1\sqrt{\sin^2\theta - n^2})\Omega(kz_1;n), \tag{11}$$

$$\Omega(kz_1;n) = \int\limits_0^n \frac{(1-n^2)\sin^2(kz_1v) + v^2}{(v+\sqrt{1-n^2+v^2})^2}dv. \tag{12}$$

Из (10) видно, что коэффициент $R - 1$ быстро ($\sim\exp 2kz_1\sqrt{\sin^2\theta - n^2}$) убывает с ростом z_1 и с увеличением угла падения.

Принимая во внимание первое из равенств (5), нетрудно показать, что

$$\operatorname{Im} t_1 = |t_1|^2 \operatorname{Im}\Gamma_0(\vec{r}_1|\vec{r}_1) + \operatorname{Im}\hat{\varepsilon}_1\Big[(1 - \operatorname{Re}\hat{\varepsilon}_1 \operatorname{Re}\Gamma_0(\vec{r}_1|\vec{r}_1) +$$
$$+ \operatorname{Im}\hat{\varepsilon}_1 \operatorname{Im}\Gamma_0(\vec{r}_1|\vec{r}_1))^2 + (\operatorname{Im}\hat{\varepsilon}_1 \operatorname{Re}\Gamma_0(\vec{r}_1|\vec{r}_1) + \operatorname{Re}\hat{\varepsilon}_1 \operatorname{Im}\Gamma_0(\vec{r}_1|\vec{r}_1))^2\Big]^{-1}. \tag{13}$$

Это соотношение является аналогом известной оптической теоремы для точечного излучателя: $\operatorname{Im} t_1$ определяет результат полного взаимодействия излучения с примесью; слагаемое $|t_1|^2 \operatorname{Im}\Gamma_0(\vec{r}_1|\vec{r}_1)$ описывает рассеянное поле, а последнее слагаемое ($\sim\operatorname{Im}\hat{\varepsilon}_1$) определяет собственно то поле, которое испущено гранулой вещества с отрицательным поглощением. Из (13) следует, что при $(\operatorname{Im}\hat{\varepsilon}_1) \to -\infty$ это поле обращается в нуль. При $\operatorname{Im}\hat{\varepsilon}_1 = 0$ из (13) имеем

$$\operatorname{Im} t_1 = |t_1|^2_{(\operatorname{Im}\hat{\varepsilon}_1 = 0)} \operatorname{Im}\Gamma_0(\vec{r}_1|\vec{r}_1). \tag{14}$$

При вычислении $\operatorname{Im}\Gamma_0(\vec{r}_1|\vec{r}_1)$ также удобно воспользоваться разложением функции $\Gamma_0(\vec{r}|\vec{r}_1)$ по плоским волнам. В результате имеем при $z_1 < 0$:

$$\operatorname{Im}\Gamma_0(\vec{r}_1|\vec{r}_1) = \frac{k}{2\pi}\left\{\psi_1(kz_1,n) + \frac{1}{1-n^2}\psi_2(kz_1,n)\right\}, \tag{15}$$

$$\psi_1(kz_1,n) = \int_0^n \frac{dv}{v + \sqrt{1-n^2+v^2}}\Big[v\cos^2(kz_1 v) + \tag{16}$$
$$+ \sqrt{1-n^2-v^2}\,\sin^2(kz_1 v)\Big],$$

$$\psi_2(kz_1,n) = \int_0^{\sqrt{1-n^2}} v\sqrt{1-n^2-v^2}\exp(2kz_1 v)\,dv. \tag{17}$$

Принимая во внимание (I3) – (I7), получим из формулы (IO) следующее окончательное выражение для коэффициента отражения:

$$R = 1 + \frac{2\cos\theta}{\pi S(1-n^2)} \exp(2kz_1\sqrt{\sin^2\theta - n^2}) \times \tag{I8}$$

$$\times\left[\frac{2\pi}{k} \operatorname{Im}\hat{\varepsilon}_1((1-\operatorname{Re}\hat{\varepsilon}_1\operatorname{Re}\Gamma_0+\operatorname{Im}\hat{\varepsilon}_1\operatorname{Im}\Gamma_0)^2 + (\operatorname{Im}\Gamma_0\operatorname{Re}\hat{\varepsilon}_1+\operatorname{Re}\Gamma_0\operatorname{Im}\hat{\varepsilon}_1)^2)^{-1} - \right.$$

$$\left. - |t_1|^2\Omega(kz_1;n)\right].$$

Здесь $\operatorname{Im}\Gamma_0 = \operatorname{Im}\Gamma_0(\vec{r}_1|\vec{r}_1)$, $\operatorname{Re}\Gamma_0 = \operatorname{Re}\Gamma_0(\vec{r}_1|\vec{r}_1)$. Первое слагаемое в скобках в (18)($\sim\operatorname{Im}\hat{\varepsilon}_1$)описывает увеличение отраженного потока за счет излучения примеси активного вещества. В это слагаемое дает вклад только та часть однородных волн в среде (П), которые трансформировались на границе сред (I) – (П) из неоднородных волн в среде (I). Второе слагаемое в скобках в (18) ($\sim|t_1|^2$) описывает уменьшение коэффициента отражения за счет ухода части излучения в среду (I). Это слагаемое содержит только вклад всех однородных волн в среде (I) или соответствующей области однородных волн в среде (П). Аналогичный расчет можно провести и для случая, когда $\theta<\theta_0$. При этом оказывается, что коэффициент отражения является непрерывной функцией угла θ и не терпит разрыва при $\theta\to\theta_0$, как в случае однородной активной среды, рассмотренной в /I/. Нетрудно проверить, что в условиях плоской геометрии, когда активное вещество в виде тонкого слоя, параллельного поверхности раздела, погружено в прозрачную среду, коэффициент отражения также не имеет разрыва при $\theta\to\theta_0$.

Таким образом мы показали, что усиление волны, отраженной от активной гранулированной среды в условиях полного внутреннего отражения, обусловлено интерференцией затравочного поля и части вторичного поля излучения, вытекающего из активной среды (I) в прозрачную среду (П). Отношение прироста отраженного потока за счет излучения примеси активного вещества к его уменьшению из-за рассеяния вглубь при $z_1 = 0$, $\varepsilon_1 = 2{,}25 - i4{,}5\cdot10^{-4}$,

$n_{II} = 1{,}5;\ n = n_I/n_{II} = 1 - \Delta n/n_{II},\ \Delta n = 2\cdot 10^{-3},\ \lambda_{II} = 7\cdot 10^{-5}$ см и $\lambda_{II}/r_0 = 10;\ 100$ равно, соответственно, $2\cdot 10^{-3};\ 2$.

Поступила в редакцию
19 июня 1980 г.

Институт ядерных исследований АН СССР
Московский физико-технический институт

Литература

1. Г. Н. Романов, С. С. Шахиджанов, Письма в ЖЭТФ, 16, 298 (1972).
2. Б. Б. Бойко, Н. С. Петров, И. З. Джилавдари, ЖПС, 18, 727 (1973).
3. Н. С. Петров, Б. Б. Бойко, И. З. Джилавдари, ЖПС 23, 705 (1975).
4. Л. А. Вайнштейн, УФН, 118, 339 (1976); в кн. Вопросы математической физики, изд. "Наука", Л., 1976 г., стр. 64.
5. Г. ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, изд. ИЛ, М. 1961 г.
6. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. "Наука", М. 1973 г.