УДК 523

ОБЩЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ВИХРЕВОЙ СТРУКТУРЫ ПУЛЬСАРА

Д. А. Киржниц, А. А. Шацкий[1]

Описан ряд качественных эффектов общей теории относительности, относящихся к системе вихревых нитей в сверхтекучей нейтронной жидкости в сердцевине вращающихся нейтронных звезд – пульсаров.

Сверхтекучесть вещества вращающихся нейтронных звезд сочетается с близостью их гравитационного ($r_g = 2GM$) и геометрического (R) радиусов, где G – постоянная тяготения, M – масса звезды (см., например, [1]). Поэтому эффекты общей теории относительности (ОТО) могут заметно сказаться на процессах, протекающих в сверхтекучей сердцевине пульсаров (в частности, на механизме сбоя их периода). Андреевым, Юдиным и одним из авторов обсуждались в этом плане случаи малых угловых скоростей $\Omega < \Omega_c \sim \hbar/(mR^2)$ (m – масса частицы) [2] и $\Omega \sim \Omega_c$ [3], когда число вихревых нитей (ВН) равно соответственно 0 и 1. Предметом настоящей заметки служит реалистический противоположный случай

$$1/R \gg \Omega \gg \Omega_c, \tag{1}$$

когда имеется плотная система вихревых нитей (ВН).

В нерелятивистском случае устойчив "твердотельный" режим вращения, а ВН прямолинейны и распределены с постоянной плотностью. Благодаря эффектам ОТО гравиэлектрической и гравимагнитной природы, определяемым соответственно величинами ∇g_{00} и $rot\vec{g}$, где, по определению работы [6], $\vec{g} = \{-g_{0\alpha}/g_{00}\}, g_{ik}$ – метрический тензор, устойчивым становится режим дифференциального вращения[2], ВН искривляются и перераспределяются в пространстве. Такие эффекты и описываются ниже.

[1]Физический факультет МГУ.

[2]Точнее говоря (см. разд. 2), такой режим устойчив в динамическом смысле, а в кинематическом по-прежнему устойчив твердотельный режим.

Далее приняты следующие ограничения. Левое неравенство (1) обеспечивает малость (в релятивистском масштабе) макроскопических скоростей в системе. Поэтому расчеты проводятся в линейном по Ω приближении, причем можно пренебречь скоростными поправками к фоновой метрике Шварцшильда (исключая, конечно, $g_{0\alpha} \propto \Omega$), а для нулевых компонент 4-скорости с учетом тождества $u_i u^i = 1$ принять выражения

$$u_0 \approx \sqrt{g_{00}}, \qquad u^0 \approx 1/\sqrt{g_{00}}. \tag{2}$$

Относительно малыми считаются и скорости частиц вещества, в энергии которого преобладает энергия покоя частиц. Скорость света принята равной единице. Используется цилиндрическая система координат $x_0, x_1, x_2, x_3 = t, \rho, \varphi, z$ с осью z, направленной по оси вращения.

1. Начнем с определения устойчивого стационарного режима вращения жидкости в сосуде (см. [4]). Вводя тензор энергии-импульса $T^i_k = wu_k u^i - p\delta^i_k$, $w = \epsilon + p$ и плотность потока $j^i = nu^i$, будем искать минимум величины $\tilde{E}$ – энергии E при фиксированных моменте M_z (т.е. сопряженном координате φ импульсе P_φ) и полном числе частиц N[3], причем плотностями перечисленных величин служат соответственно T^0_0, T^0_φ и j^0. Слагаемые в $\tilde{E}$, описывающие поле тяготения, не рассматриваются. Таким образом, выражение для $\tilde{E}$ можно записать в виде

$$\tilde{E} = E - \Omega_0 \mathrm{M}_z - \mu N. \tag{3}$$

Однако в полную энергию системы $\tilde{E}_{tot}$ (которую мы не рассматриваем) должны будут войти еще слагаемые, отвечающие за вращение самого сосуда: $I\Omega^2/2 - \Omega_0 I\Omega$, где I и Ω – его момент инерции и угловая скорость. После варьирования этих слагаемых по Ω мы придем к равенству $\Omega = \Omega_0$. Поэтому множители Лагранжа в выражении для $\tilde{E}$ равны, соответственно, угловой скорости сосуда и химическому потенциалу вещества.

Остальные слагаемые, относящиеся к веществу, равны

$$\tilde{E} = \int d^3x\sqrt{-g}\,\eta, \qquad \eta = wu^0(u_0 + \Omega u_\varphi) - p - \mu n u^0.$$

Условия минимума по u_φ и n дают соотношение между компонентами скорости

$$u^\varphi / u^0 = \dot{\varphi} = \Omega. \tag{4}$$

[3] Применительно к сверхтекучему конденсату, число частиц которого вообще говоря не фиксировано, наше рассмотрение оправдано вдали от критических значений температуры и угловой скорости.

При выводе уравнения (4) были учтены следующие соотношения, вытекающие из тождества $u_i u^i = 1$ и соотношений термодинамики: $du_0/du_\varphi = -u^\varphi/u^0$ и $d\epsilon/dn = w/n$.

Таким образом, как и в нерелятивистском случае, при сохранении момента энергетически выгодно твердотельное вращение $\dot{\varphi}$=const.

2. В нерелятивистском случае под твердотельным вращением $\vec{v} = [\vec{\Omega}, \vec{x}]$ можно было бы понимать и течение с постоянной в пространстве завихренностью $rot\vec{v} = 2\vec{\Omega} = const$. Однако в ОТО при выполнении (4) завихренность меняется в пространстве и в этом смысле вращение следует считать дифференциальным. Дело в том, что завихренность (как и момент, гравимагнитное поле и т.п.) определяется не кинематической контравариантной компонентой скорости u^φ, а ее динамической ковариантной компонентой

$$u_\varphi = g_{\varphi\varphi}u^\varphi + g_{\varphi 0}u^0 \approx (-\Omega\rho^2 g_{ll} + g_{0\varphi})/\sqrt{g_{00}}, \tag{5}$$

где использованы равенства (2) и (4), а для метрики удобно использовать ее выражения в конформно-евклидовой, цилиндрической системе координат внутри вещества (см. [6], § 100). В первом постньютоновском приближении (линейном по r_g/R и v/c) эта метрика имеет вид: $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - g_{ll}(dl)^2 + 2g_{0\varphi}dx^0 d\varphi$, где dl – элемент пространственной длины в плоском пространстве: $(dl)^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$. При таком определении системы координат величина $2\pi r\sqrt{g_{ll}}$ является длиной окружности с центром в центре системы, здесь $r^2 = \rho^2 + z^2$. Стоит отметить, что в первом приближении компоненты метрики (а потому и наши результаты) не зависят от выбора системы координат и имеют внутри вещества вид $g_{ll} = 1/(1 - 2GM(r)/r)$, где $M(r)$ – масса под радиусом r, а для g_{00}, в физически важном случае постоянной плотности вещества, получим: $g_{00} = \sqrt{g_{ll}}$. Применительно к сверхтекучей жидкости выражение для завихренности $\vec{P}$ имеет вид трехмерного ротора[4] выражения[5] $w\vec{u}/m^*n$.

$$P^\alpha = \mathrm{rot}^\alpha(\frac{w\vec{u}}{m^*n}) = \gamma^{-1/2}\varepsilon^{\alpha,\mu,\nu}\partial_\mu(\frac{wu_\nu}{m^*n}), \tag{6}$$

$$\frac{wu_\nu}{m^*n} \approx \delta^\varphi_\nu[-\Omega\rho^2 g_{00} + g_{0\varphi}], \tag{7}$$

[4]Определение трехмерного ротора в ОТО дано в [6].

[5]В общерелятивистском случае речь должна идти о роторе величины $w\vec{u}/(m^*n)$, а не $\vec{u}$, т.к. именно эта величина, в отличие от $\vec{u}$, является градиентом фазы параметра порядка сверхтекучей жидкости (см. [2] и [3]), при этом для сверхтекучего конденсата $w/n = \hbar k = m^*/u_0$ – см. следующий раздел.

где детерминант γ пространственной части метрики $\gamma_{\mu\nu}$ равен $\rho^2 g_{00}^6$. Завихреннность в найденном выше устойчивом течении[6] получается подстановкой (7) в (6):

$$\begin{cases} P^\rho \approx 2\Omega^\rho_{eff} + \Omega\rho\partial_z g_{00}, \\ P^z \approx 2\Omega^z_{eff} - \Omega\rho\partial_\rho g_{00}, \end{cases} \tag{8}$$

где $\vec{\Omega}_{eff} = \vec{\tilde{\Omega}} - rot\vec{g}/2$, $\vec{g} \approx \{-g_{0\alpha}\}$, $\tilde{\Omega}^z = -\Omega/g_{00}^2$, $\tilde{\Omega}^\varphi = \tilde{\Omega}^\rho = 0$ (второе слагаемое в Ω_{eff} – дополнительная "подкрутка", создаваемая которой сила Кориолиса совпадает с силой Лензе – Тирринга [6]). Как видно, за счет эффектов ОТО завихренность действительно непостоянна. В нерелятивистском пределе, как это и должно быть, $|P^z| = 2\Omega$, $P^\rho = 0$.

3. Волновая функция сверхтекучего конденсата имеет вид $\psi = \nu\exp(i\sigma)$. С учетом тождества $u_i u^i = 1$ обобщение нерелятивистского соотношения $\vec{v} = (\hbar/m^*)\nabla\sigma$ на случай ОТО имеет вид

$$u_i = \frac{1}{k}\partial_i\sigma, \qquad k^2 = \partial_i\sigma\partial^i\sigma. \tag{9}$$

В самом деле, найдем выражение для тока $j_i = nu_i$ общерелятивистской сверхтекучей жидкости с уравнением непрерывности $j_i^{;i} = j^i_{;i} = 0$. Уравнение движения для скалярного конденсата имеет характерный для ОТО вид

$$\psi^{;i}_{;i} = (-g)^{-1/2}\partial_i[(-g)^{1/2}\partial^i\psi] + F(|\psi|^2)\psi = 0, \tag{10}$$

где $F = (m^*/\hbar)^2/g_{00}$ – нелинейные члены самодействия, под m^* здесь и далее понимается масса частицы конденсата (куперовской пары). Подставляя сюда выражение для ψ и отделяя действительную часть от мнимой, находим для последней $(\nu^2\partial^i\sigma)_{;i} = 0$, откуда и следует пропорциональность скорости градиенту фазы.

Действительная же часть (10) дает $k^2 = F + \nu^{;i}_{;i}/\nu$. В случае нерелятивистского вещества, в котором энергия покоя преобладает (см. начало статьи), это дает в первом постньютоновском приближении ОТО, линейном по скорости, $k^2 \approx (m^*/\hbar)^2/u_0^2$, что является следствием общерелятивистской теоремы Бернулли (см. [5], § 134); при этом величина k отождествляется с $w/(n\hbar)$. Отсюда

$$u_i \approx \hbar\sqrt{g_{00}}\partial_i\sigma/m^*. \tag{11}$$

[6]Подразумевается течение в среднем, усредненное по масштабам, много меньшим масштабов системы, но много большим межвихревых расстояний – см. раздел 4.

Отсюда видно, что именно выражение (6) для ротора скорости сохраняет свойство потенциальности течения сверхтекучей жидкости, справедливое в нерелятивистском случае. Это означает, что такое течение не совпадает с устойчивым (разд. 1), имеющим отличный от нуля ротор (см. (8)).

В стремлении приблизиться к оптимальному режиму сверхтекучее течение испытывает хорошо известную перестройку, в результате которой при сохранении "почти всюду" свойства потенциальности течения возникает завихренность, которая в среднем совпадает с (8). Это происходит благодаря образованию системы ВН, каждой из которых отвечает фаза волновой функции $\sigma = \varphi$, равная азимутальной координате в локальной цилиндрической системе с осью, направленной по оси нити. Коэфициент 1 в правой части (9) связан с требованием однозначности волновой функции ψ: при полном обходе нити фаза σ меняется на 2π (целочисленный коэффициент, не равный 1, энергетически невыгоден). Тогда согласно (11) для одного вихря

$$u_\varphi = \hbar\sqrt{g_{00}}/m^*. \tag{12}$$

На самой оси вихря, где величина φ не определена, волновая функция теряет смысл и сверхтекучесть исчезает. Это соответствует физически несверхтекучему "кору" ВН малого в макроскопическом масштабе радиуса. Приведенные рассуждения универсальны и в равной мере относятся как к нерелятивистскому, так и к общерелятивистскому случаям.

4. Именно в объеме кора нарушается потенциальность течения и выполняется неравенство $|\vec{P}| \neq 0$. Поэтому направление ВН в каждой ее точке совпадает с направлением вектора $\vec{P}$ в той же точке. Как мы видим из формулы (8), этот вектор, в нерелятивистском случае параллельный оси вращения, приобретает за счет эффектов ОТО радиальную компоненту. Поэтому ВН искривляется, располагаясь в меридиональной плоскости, причем угол Θ между направлениями нити и оси вращения определяется соотношением

$$\Theta \approx tg\Theta = P^\rho/P^z = \partial_z[-\rho g_{00} + g_{0\varphi}/(\Omega\rho)]/2. \tag{13}$$

Отсюда видно, что на языке постньютоновского приближения имеется две искривляющие нить силы – гравиэлектрическая (своего рода "рефракция" в непостоянном поле g_{00}) и гравимагнитная, определяемая величиной $rot\vec{g}$.

В нерелятивистском случае плотность ВН постоянна и равна $f_0 = m^*\Omega/(\pi\hbar)$. Только что упомянутые силы делают эту величину переменной в пространстве. В самом деле, циркуляция $\hbar\partial_i\sigma/m^* = \hbar k\vec{u}/m^*$ вокруг одной нити равна $\Gamma_1 = (\hbar/m^*)\int_0^{2\pi} d\varphi(\partial_\varphi\sigma) =$

$2\pi\hbar/m^*$. С другой стороны, в устойчивом режиме, который имитируется плотной (см. (1)) системой ВН, циркуляция скорости по контуру, охватывающему достаточно много нитей, равна согласно теореме Стокса площади контура, умноженной на модуль $|\vec{P}|$ вектора завихренности. Поэтому плотность ВН в перпендикулярной им плоскости в данной точке равна (см. (8))

$$f = P/\Gamma \approx m^*|P^z|\sqrt{g_{ll}}/(2\pi\hbar) \approx f_0[1/g_{00} - \partial_\rho g_{0\varphi}/(2\Omega\rho) + \rho\partial_\rho g_{00}/2]. \tag{14}$$

В этой предварительной короткой заметке не приводятся конкретные оценки рассмотренных выше эффектов. Укажем лишь, что их вклад определяется отношением r_g/R для вращающегося тела, не слишком отличающимся от единицы для реальных пульсаров.

Работа поддержана РФФИ, грант 96-02-16566-а и ГНТП, проект "Статистическая физика атомных и нуклонно-ядерных систем".

ЛИТЕРАТУРА

[1] Манчестер Р. Н., Тейлор Дж. К. Пульсары. М., Мир, 1980.

[2] Андреев А. Ю., Киржниц Д. А., Юдин С. Н. Письма в ЖЭТФ, **61**, 825 (1995).

[3] Киржниц Д. А., Юдин С. Н. Письма в ЖЭТФ, **63**, 33 (1996).

[4] Hartl J. R., Sharp D. H. ApJ, **147**, 317 (1967).

[5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М., Наука, 1986.

[6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Наука, 1988.

Поступила в редакцию 3 августа 1998 г.