Краткие сообщения по физике № 2 1981

НОВЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В МОДЕЛИ ИЗИНГА

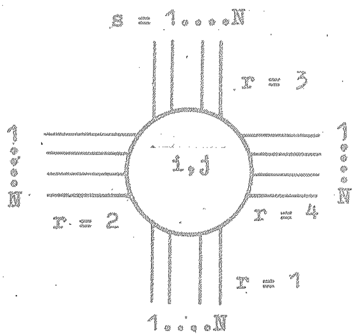
Д. М. Штейнградт

УДК 536.764

Рассмотрена трехмерная решетка, на которой задана многовершинная модель. Выделены два точно решаемых случая.

Рассмотрим трехмерную решетку узлов. Пусть на ней определена многовершинная модель, аналогичная восьмивершинной модели, введенной для двумерной решетки /I/. Если мы спроектируем трехмерную решетку на плоскость, то к ней можно будет применить те методы исследования, которые хорошо работают в двумерном случае. Получаемая плоская решетка будет содержать в каждом узле N первоначальных узлов.

Для двух направлений в получившейся плоскости мы определим связи только между ближайшими соседями, а связи по третьему направлению, т.е. между N внутренними узлами, определим



Р и с. 1. Расположение связей в узле

в виде обобщенного ассоциированного полинома, с помощью которого удобно описывать многовершинные модели. Конкретный вид ассоциированного полинома мы можем определить из условия наличия точного решения. Очевидно, что взаимодействие по третьему направлению существенно отличается, в такой постановке, от взаимодействия по двум другим направлениям.

Каждой связи, входящей в i,j-тый узел (см. рис. I), припишем спиновую переменную $\sigma_{r,i,j,s}$ (r - направление, по которому связь входит в узел, s - номер внутреннего узла, т.е. третья координата).

Статсумма такой решетки может быть записана в следующем виде:

$$Z = 2^{-4LMN} \sum_{\{\sigma_{r,i,j,s}\}} \prod_{i,j,s=1}^{L,M,N} \left[(1 + \sigma_{1,i+1,j,s}\sigma_{3,i,j,s}) \times \right.$$

$$\left. \times (1 + \sigma_{2,i,j+1,s}\sigma_{4,i,j,s})\right] \prod_{i,j,s=1}^{L,M,N} P_{i,j}, \tag{I}$$

где $P_{ij} \equiv P(\sigma_{r,i,j,s})$ - ассоциированный полином.

Статсумма (I) с помощью метода континуального интегрирования по грассмановским переменным /2/ может быть представлена в виде:

$$Z = \exp \sum_{i,j,s=1}^{L,M,N} (\tau_1\tau_3\delta_{1,i+1,j,s}\delta_{3,i,j,s} + \delta_{2,i,j+1,s}\delta_{4,i,j,s}) \times \Big|_{\{u\}\to 0}$$

$$\times \prod_{i,j=1}^{L,M} \left\{ 2^{-4N} \sum_{\{\sigma_{r,i,j,s}\}} \left[P_{i,j} \prod_{s=1}^{N} (1 + \tau_1 u_{1,i,j,s}\sigma_{1,i,j,s}) \times \right.\right. \tag{2}$$

$$\times \prod_{s=N}^{1} (1 + \tau_3 u_{2,i,j,s}\sigma_{2,i,j,s}) \prod_{s=1}^{N} (1 + \tau_3\sigma_{3,i,j,s}u_{3,i,j,s}) \times$$

$$\left.\left. \times \prod_{s=1}^{N} (1 + \tau_3\sigma_{4,i,j,s}u_{4,i,j,s}) \right]\right\}.$$

В фигурных скобках в (2) после осреднения по $\sigma_{r,i,j,s}$ мы получим некоторую функцию от грассмановских переменных $u_{r,i,j,s}$. Делая предположения о виде этой функции, мы можем указать два точно решаемых случая:

I. Функция грассмановских переменных представима в виде экспоненты от некоторой квадратичной формы:

$$F_1(u) = \exp \sum_{s,m=1}^{N,N} (\vec{u}^{T\prime}_{i,j,s} \hat{D}_m \vec{u}^{\prime}_{i,j,s+m}), \qquad (3)$$

где $\vec{u}^{T\prime}_{i,j,s} = \| \tau_1 u_{1,i,j,s};\ \tau_3 u_{2,i,j,s};\ \tau_3 u_{3,i,j,s};\ \tau_3 u_{4,i,j,s} \|$.

2. Функция представима в виде произведения линейной комбинации грассмановских переменных на выражение (3):

$$F_2(u) = \left(\sum_{r,s=1}^{4,N} \alpha_{r,s} u^{\prime}_{r,i,j,s} \right) F_1(u), \qquad (4)$$

где $u^{\prime}_{1,i,j,s} = \tau_1 u_{1,i,j,s}$, $u^{\prime}_{r,i,j,s} = \tau_3 u_{r,i,j,s}$, $r = 2,3,4$.

Статсуммы, соответствующие (3) и (4), не сложно получить в явном виде. Для случая I:

$$Z = \frac{1}{4} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 = \pm 1} (1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_1\alpha_2) \exp \sum_{\substack{i,j,s=1 \\ \{u\} \to 0}}^{L,M,N} (\delta_{1,i+1,j,s} \delta_{3,i,j,s} \tau_1 \tau_3 \alpha_2 +$$

$$+ \delta_{2,i,j+1,s} \delta_{4,i,j,s}) \exp \sum_{i,j=1}^{L,M} \sum_{s,m=1}^{N,N} (\vec{u}^{T\prime}_{i,j,s} \hat{D}_m \vec{u}^{\prime}_{i,j,s+m}) =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 = \pm 1} (1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_1\alpha_2) \exp \sum_{k,p,q=1}^{L,M,N} \frac{1}{2} \ln \Big\{ 1 + a_{13}^2(q) +$$

$$+ a_{24}^2(q) + h^2 + 2\alpha_2 (a_{13}(q) - a_{24}(q) h) \cos \left[\frac{2\pi}{L} \left(k + \frac{\alpha_1 - 1}{4} \right) \right] +$$

$$+ 2(a_{24}(q)-a_{13}(q)h)\cos\left[\frac{2\pi}{M}\left(p+\frac{\alpha_2-1}{4}\right)\right] + 2\alpha_2(a_{13}(q)a_{24}(q) -$$

$$- a_{14}(q)a_{23}(q))\cos\left[\frac{2\pi}{L}\left(k+\frac{\alpha_1-1}{4}\right)+\frac{2\pi}{N}\left(p+\frac{\alpha_2-1}{4}\right)\right] + \qquad (5)$$

$$+ 2\alpha_2(a_{13}(q)a_{24}(q) - a_{12}(q)a_{34}(q))\cos\left[\frac{2\pi}{L}\left(k+\frac{\alpha_1-1}{4}\right) -\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2\pi}{M}\left(p+\frac{\alpha_2-1}{4}\right)\right]\right\},$$

где $h = a_{12}(q)a_{34}(q) + a_{14}(q)a_{23}(q) - a_{13}(q)a_{24}(q)$,

$$a_{r,s}(q) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=1}^{N}(\hat{D}_m)_{r,s}\exp\left[\frac{2\pi I}{N}(m-\chi_2)(q-\chi_1)\right],$$

χ_1 определяется из условия замыкания $u_{r,i,j,s}$ в (3):

$$u_{r,i,j,s+N} = u_{r,i,j,s}\exp 2\pi I\chi_1, \quad (I^2 = -1),$$

χ_2 определяется из условия: $a_{r,s}(-q) = a_{r,s}(q)$,

$$\delta_{r,i,j,s} = \delta/\delta u_{r,i,j,s}.$$

Для случая 2:

$$L = \frac{1}{4}\sum_{\sigma_1\sigma_2=\pm 1}(1-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_1\sigma_2)\int\{dv\}\exp\sum_{i,j,s=1}^{L,M,N}(-\delta_{2,i,j+1,s}\delta_{4,i,j,s} - \Big|_{\{u\}\to 0}$$

$$- \delta_{1,i+1,j,s}\delta_{3,i,j,s}(-1)^j)\exp\sum_{i,j=1}^{L,M}\left[v_{ij}\sum_{r,s=1}^{4,N}\alpha_{r,s}\tau_3 u'_{r,i,j,s} +\right.$$

$$\left. + \sum_{s,m=1}^{N,N}(\bar{u}^{T\prime}_{i,j,s}\hat{D}_m\bar{u}'_{i,j,s+m})\right] = \frac{1}{4}\sum_{\sigma_1\sigma_2=\pm 1}(1-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_1\sigma_2)\times$$

$$\times\exp\sum_{k,p,q=1}^{L,M,N}\frac{1}{2}\ln\left\{2(\nu_2^2\nu_4^2 - \alpha_2^2(q)\alpha_4^2(q))\left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{M}\left(p+\frac{\sigma_2-1}{4}\right)\right)\right] -\right.$$

$$- 2(\vartheta_1^2\vartheta_3^2 - \alpha_1^2(q)\alpha_3^2(q))\Bigl[1 - \cos\Bigl(\frac{2\pi}{L}\Bigl(k + \frac{\sigma_1 - 1}{4}\Bigr)\Bigr)\Bigr] + 2\bigl[(\alpha_4(q)\vartheta_4 +$$

$$+ \alpha_2(q)\vartheta_2)^2 - 2\alpha_2(q)\vartheta_2\alpha_4(q)\vartheta_4\cos\Bigl(\frac{4\pi}{L}\Bigl(k + \frac{\sigma_1-1}{4}\Bigr)\Bigr) - 2\alpha_1(q)\vartheta_1\alpha_3(q)\vartheta_3\times$$

$$\times\cos\Bigl(\frac{4\pi}{M}\Bigl(p + \frac{\sigma_2-1}{4}\Bigr)\Bigr) - (\alpha_1(q)\vartheta_1 - \alpha_2(q)\vartheta_2)^2\cos\Bigl(\frac{4\pi}{L}\Bigl(k + \frac{\sigma_1-1}{4}\Bigr) - \frac{2\pi}{M}\times$$

$$\times\Bigl(p + \frac{\sigma_2-1}{4}\Bigr)\Bigr) - (\alpha_1(q)\vartheta_1 - \alpha_4(q)\vartheta_4)^2\cos\Bigl(\frac{4\pi}{L}\Bigl(k + \frac{\sigma_1-1}{4}\Bigr) + \frac{2\pi}{M}\times$$

$$\times\Bigl(p + \frac{\sigma_2-1}{4}\Bigr)\Bigr)\Bigr]\Bigr\}, \qquad (6)$$

где

$$\vartheta_1 = \alpha_2(q)a_{34}(q) - \alpha_3(q)a_{24}(q) + \alpha_4(q)a_{23}(q),$$
$$\vartheta_2 = \alpha_1(q)a_{34}(q) - \alpha_3(q)a_{14}(q) + \alpha_4(q)a_{13}(q),$$
$$\vartheta_3 = \alpha_1(q)a_{24}(q) - \alpha_2(q)a_{14}(q) + \alpha_4(q)a_{12}(q),$$
$$\vartheta_4 = \alpha_1(q)a_{23}(q) - \alpha_2(q)a_{13}(q) + \alpha_3(q)a_{12}(q),$$

$$\alpha_r(q) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{s=1}^{N}\alpha_{r,s}\exp\Bigl\{\frac{2\pi I}{N}(s - \chi_2)(q - \chi_1)\Bigr\},$$

$a_{r,s}$, χ_1, χ_2 и $\delta_{r,i,j,s}$ определяются теми же формулами, что и в случае I.

В рамках данного рассмотрения можно также записать представление для соответствующих ассоциированных полиномов:

$$P_{ij} = \prod_{s=N\ \{u\}\to 0}^{1}(1 + \tau_3\sigma_{4,i,j,s}\delta_{4,i,j,s})\prod_{s=N}^{1}(1 + \tau_3\sigma_{3,i,j,s}\delta_{3,i,j,s})\times$$
$$\times\prod_{s=1}^{N}(1 + \tau_3\sigma_{2,i,j,s}\delta_{2,i,j,s})\prod_{s=N}^{1}(1 + \tau_1\sigma_{1,i,j,s}\delta_{1,i,j,s})F_1(u). \qquad (7)$$

$$P_{ij} = \prod_{s=N\ \{u\}\to 0}^{1}(1 + \tau_3\delta_{4,i,j,s}\sigma_{4,i,j,s})\prod_{s=N}^{1}(1 + \tau_3\delta_{3,i,j,s}\sigma_{3,i,j,s})\times$$
$$\times\prod_{s=1}^{N}(1 + \tau_3\delta_{2,i,j,s}\sigma_{2,i,j,s})\prod_{s=N}^{1}(1 + \tau_1\delta_{1,i,j,s}\sigma_{1,i,j,s})F_2(u). \qquad (8)$$

Второй из рассмотренных случаев (выражения (4), (6), (8)) допускает следующее обобщение: перед экспонентой может стоять не одна, а произведение нескольких линейных комбинаций грассмановских переменных:

$$F_2'(u) = \prod_{t=1}^{f} \left(\sum_{r,s=1}^{4,N} \alpha_{r,s,t} u_{r,i,j,s} \right) F_1(u). \qquad (9)$$

Указанное обобщение также имеет точное решение (решение для аналогичного обобщения в проблеме димеров было выполнено в работе /3/.

В заключение статьи мне хотелось бы выразить свою признательность и благодарность моему научному руководителю Е. С. Фрадкину.

Поступила в редакцию
I5 декабря I980 г.

Литература

1. C. Fan, F. Y. Wu, Phys. Rev., B2, N 2, 723 (1970).
2. E. S. Fradkin, D. M. Shteingradt, Nuovo Cimento, 47A, N 1, 115 (1978).
3. Е. С. Фрадкин, Д. М. Штейнградт, Препринт ФИАН № 98, I980 г.