

КРИТИЧЕСКАЯ ТЕМПЕРАТУРА СВЕРХПРОВОДНИКОВ  
С СИЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ

О. В. Долгов, В. С. Карахтанов, С. Н. Рашкеев

УДК 537.312.62

Предложено выражение для критической температуры сверхпроводника, хорошо описывающее  $T_c$  реальных веществ с сильной связью ( $\lambda \gg 1$ ).

Для вычисления критической температуры сверхпроводника с сильной связью по известным характеристикам электрон-фононного взаимодействия пользуются эмпирической формулой Макмиллана /1/

$$T_c = \frac{\omega_{\log}}{1,20} \left[ \exp \left( - \frac{1,04(1 + \lambda)}{\lambda - \mu^* - 0,62\lambda\mu^*} \right) \right], \quad (I)$$

где  $\lambda$  - константа электрон-фононного взаимодействия,  $\mu^*$  - кулоновский псевдопотенциал.

Аналитический вывод выражения, аналогичного (I), был получен в работе /2/ с помощью итераций по параметру  $\lambda/(\lambda + 1)$ . Однако эти выражения справедливы для случая слабой и промежуточной связи ( $\lambda \leq 1$ ). В работе /3/ и других было показано, что при больших  $\lambda$  ( $\lambda \gg 1$ ) решения уравнений Элиашберга имеют вид  $T_c \sim \sqrt{\lambda \langle \omega^2 \rangle}$ , где  $\langle \omega^2 \rangle = \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} \alpha^2(\omega) F(\omega) \omega d\omega$  - среднеквадратичная частота ( $\alpha^2(\omega) F(\omega)$  - спектральная функция электрон-фононного взаимодействия). Авторы работы /3/ предложили интерполяционное выражение, получающееся умножением (I) на эмпирически подобранные функции  $f_1$  и  $f_2$ , которые зависят от  $\lambda$  и дают правильную асимптотику при больших  $\lambda$ .

В серии работ /4/ было рассмотрено решение уравнений Элиашберга для  $T_c$  в виде ряда по степеням  $1/\lambda$ .

$$T_c = \alpha_0 \sqrt{\lambda \langle \omega^2 \rangle} \left[ 1 + A_1/\lambda + A_2/\lambda^2 + A_3/\lambda^3 + \dots \right] =$$

$$= \alpha_0 \sqrt{\lambda \langle \omega^2 \rangle} \left\{ 1 + \alpha_1 \frac{\langle \omega^4 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^2} \frac{1}{\lambda} + \left[ \alpha_{21} \frac{\langle \omega^6 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^3} + \alpha_{22} \frac{\langle \omega^4 \rangle^2}{\langle \omega^2 \rangle^4} \right] \frac{1}{\lambda^2} + \right.$$

$$\left. + \left[ \alpha_{31} \frac{\langle \omega^8 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^4} + \alpha_{32} \frac{\langle \omega^4 \rangle \langle \omega^6 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle^5} + \alpha_{33} \frac{\langle \omega^4 \rangle^3}{\langle \omega^2 \rangle^6} \right] \frac{1}{\lambda^3} + \dots \right\} \quad (2)$$

Константы  $\alpha_{ij}$  зависят лишь от  $\mu^*$  и даны в табл. I, а

$$\langle \omega^n \rangle = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} \omega^{n-1} \alpha^2(\omega) F(\omega) d\omega.$$

Таблица I

Зависимость коэффициентов  $\alpha_{ij}$  от кулоновского псевдопотенциала /4/

	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{33}$
$\mu^* = 0$	0,1827	-0,3434	0,2547	0,2915	-0,196	0,615	-0,420
$\mu^* \neq 0$	$\frac{\alpha_0^{(0)}}{(1+2,45\mu^*)^{1/2}}$	$\alpha_1^{(0)}(1 + 2,797\mu^*)$	$\alpha_{21}^{(0)}(1 + 2,6\mu^*)^2$	$\alpha_{22}^{(0)}(1 + 2,8\mu^*)^2$	$\alpha_{31}^{(0)}(1 + 2,7\mu^*)^3$	$\alpha_{32}^{(0)}(1 + 2,7\mu^*)^3$	$\alpha_{33}^{(0)}(1 + 2,7\mu^*)^3$

Однако радиус сходимости данного ряда сильно зависит от формы спектра  $\alpha^2(\omega)F(\omega)$ , что может привести к неправильным результатам; например, для ртути получаем  $T_c < 0$ . Поэтому для улучшения сходимости данного ряда необходимо применить метод аппроксимант Паде. В результате получаем

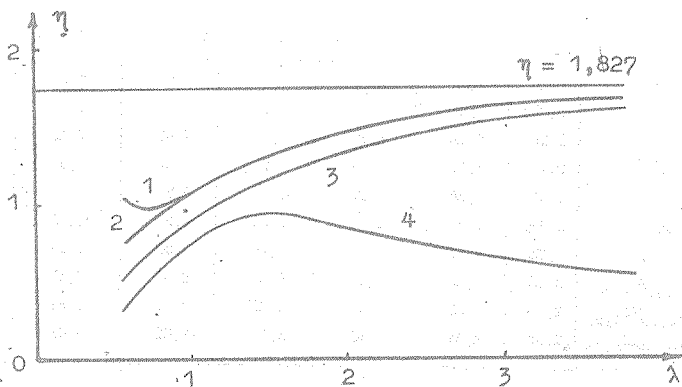
$$T_c = \alpha_0 \sqrt{\lambda \langle \omega^2 \rangle} \frac{A_1^2 + A_2 - (A_1^3 - A_3)/\lambda}{A_1^2 + A_2 - (A_3 + A_1 A_2)/\lambda + (A_2^2 - A_1 A_3)/\lambda^2}, \quad (3)$$

где коэффициенты  $A_i$  даются выражением (2).

Из (2) и (3) следует, что при больших константах связи  $T_c$  выходит на асимптотику  $T_c \approx 0,1827 \sqrt{\lambda \langle \omega^2 \rangle} / \sqrt{1 + 2,45\mu^*}$  (отметим, что эмпирическая формула работы /3/ дает правильную асимптотику лишь в нулевом порядке по  $1/\lambda$ ). На рисунке I приведены зависимости отношения  $T_c / \sqrt{\lambda \langle \omega^2 \rangle}$  от  $\lambda$  для случая

$$\alpha^2(\omega)F(\omega) = (\lambda/2)\omega_0\delta(\omega - \omega_0) + \lambda\omega_0\delta(\omega - 2\omega_0),$$

вычисленные по формулам (I) - (3), а также результат численного решения уравнений Элиашберга. Результаты расчета по этим формулам с помощью функций  $\alpha^2(\omega)F(\omega)$ , восстановленных из туннельных характеристик /5/, приведены в табл. 2 и показывают, что выражение (3) дает хорошее согласие с экспериментом в широкой области значений  $\lambda$  ( $\lambda \geq 0,7$ ). Для сравнения приведены также результаты расчетов  $T_c$  по формулам работ /2,3/.



Р и с. I. Зависимость  $\eta = T_c \sqrt{\lambda \langle \omega^2 \rangle}$  от константы связи  $\lambda$  для спектра  $\alpha^2(\omega)F(\omega) = (\lambda\omega_0/2)\delta(\omega - \omega_0) + \lambda\omega_0\delta(\omega - 2\omega_0)$ , вычисленное по выражениям (I) - (3), а также результат численного решения уравнений Элиашберга: 1 - формула (2), 2 - (3), 3 - численное решение, 4 - (I)

Выражение (3) удобно для исследования зависимости  $T_c$  от формы спектра  $\alpha^2(\omega)F(\omega)$ . Однако в данной заметке мы остановимся лишь на верхнем пределе критической температуры. Используя (3), легко показать, что наиболее оптимальным видом спектральной функции  $\alpha^2(\omega)F(\omega)$  является эйнштейновский спектр  $\alpha^2(\omega)F(\omega) \sim \delta(\omega - \omega_0)$  и  $\mu^* = 0$ . Отсюда получаем

$$T_c \leq T_c^{\max} = \sqrt{\frac{N(0)\langle I^2 \rangle}{M}} \alpha_0 \times$$

$$\times \left[ \alpha_1^2 + \alpha_{21} + \alpha_{22} - \frac{1}{\lambda} (\alpha_1^3 - \alpha_{31} - \alpha_{32} - \alpha_{33}) \right] / \left[ \alpha_1^2 + \alpha_{21} + \alpha_{22} - \frac{1}{\lambda} (\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33} + \alpha_1 \alpha_{21} + \alpha_1 \alpha_{22}) + \frac{1}{\lambda^2} \left[ (\alpha_{21} + \alpha_{22})^2 - \alpha_1 (\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33}) \right] \right]$$

Таблица 2

Критическая температура ряда веществ по формулам (I) - (3) и работам /2,3/.

Вещество	$\lambda$	$T_c(1)$ , К	$T_c(2)$ , К	$T_c(3)$ , К	$T_c(2)$ , К	$T_c(3)$ , К	$T_{c\text{экс}}$ , К
Hg	1,62	3,53	2,91	4,14	0	5,32	4,19
La	0,804	3,27	2,97	3,44	6,78	3,60	3,40
Pb	1,55	6,48	5,99	7,26	7,47	7,43	7,23
Sa	0,716	3,81	3,55	3,98	4,84	3,07	3,72
Ta	0,692	4,58	4,39	4,75	3,78	3,45	4,47
Tl	0,795	2,21	2,11	2,32	2,95	2,40	2,39
$Tl_{0,9}Bi_{0,1}$	0,78	2,16	1,99	2,26	2,99	2,29	2,30
$Pb_{0,7}Bi_{0,3}$	2,03	6,85	6,09	8,20	8,52	8,50	8,45
$Pb_{0,65}Bi_{0,35}$	2,13	6,80	5,97	8,28	8,72	8,69	8,95
$Pb_{0,45}Bi_{0,55}$	2,58	4,66	3,81	6,18	7,03	6,89	7,00

Мы использовали равенство  $\lambda \langle \omega^2 \rangle = N(0) \langle I^2 \rangle / M$ , где  $N(0)$  - плотность состояний на ферми-поверхности,  $M$  - масса иона,  $\langle I^2 \rangle$  - средний квадрат электрон-фононного матричного элемента. Например, для свинца  $T_c^{\max} \approx 7,9$  К, что означает, что критическая температура Pb близка к максимальной при данном значении  $\lambda$ .

В заключение авторы выражают благодарность Е. Г. Максимова.

Поступила в редакцию  
27 февраля 1981 г.

### Л и т е р а т у р а

1. W. L. McMillan, Phys. Rev., 167, 331 (1968).

2. А. Е. Каракозов, Е. Г. Максимов, С. В. Машков, ЖЭТФ, 68, 1937 (1975).
3. P. B. Allen, R. C. Dynes, Phys. Rev., B12, 905 (1975).
4. J.-D. Cai, G.-D. Ji, H.-S. Wu, J.-H. Cai, G.-D. Gong, Acta Physica Sinica, 26, 509 (1977), 28, 393 (1979).
5. R. C. Dynes, W. L. McMillan, J. M. Rowell, Preprint Bell Lab., 1973.