Краткие сообщения по физике № 8 1981

СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕУПРУГОСТИ ВО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ N–Pb

В. П. Павлюченко, С. И. Никольский

УДК 53.088.6 + 539.I25

Разработан статистический метод решения обратных задач, который может найти применение во многих областях. С его помощью в космических лучах при энергиях I–30 ТэВ решена обратная задача по восстановлению распределения коэффициентов неупругости, свободного от приборных (в широком смысле слова) искажений.

Новый подход к решению обратных задач был разработан при решении конкретной задачи обработки экспериментальных данных. На этом примере он и будет рассмотрен.

Коэффициент неупругости K в сильных взаимодействиях определяется как доля энергии первичной частицы, затраченная на генерацию всех вторичных частиц. Распределение этого параметра f(K) является одной из важнейших характеристик в физике высоких энергий. Простым пересчетом из него можно получить структурную функцию для сохраняющихся после взаимодействия нуклонов.

В настоящей работе распределение коэффициентов неупругости было экспериментально получено из анализа развития ядерных каскадов в свинцовом поглотителе ионизационного калориметра Тянь-Шаньской установки ШАЛ. Средняя энергия взаимодействующих нуклонов $\simeq 5$ Тэв, полное число событий 93I4.

Отбор нуклонных каскадов и алгоритм вычисления коэффициентов неупругости в индивидуальных событиях описаны в /I/ и /2/.

Из-за ошибок измерения, вносимых калориметром, и ошибок алгоритма вычислений в каждом событии вычисленная величина K', вообще говоря, не совпадает с истинным значением K в этом событии. Поэтому непосредственно полученное распределение $F(K')$ искажено по сравнению с истинным $f(K)$. Для восстановления $f(K)$ по распределению $F(K')$ надо решить обратную задачу

$$F(K') = \int_0^1 A(K',K)f(K)dK$$

или

$$F_i = \sum_{j=1}^{M} A_{ij}f_j \qquad i = 1,\ldots N \qquad (I)$$

Здесь F_i – непосредственно полученное, f_j – искомое распределения, для краткости назовем их функциями, а A_{ij} – так называемое "ядро прибора" в широком смысле, т.е. матрица, преобразующая распределение f_j в F_i. Она должна учитывать искажения, вносимые собственно прибором (калориметром) и последующими вычислениями (алгоритм обработки, выборка событий и т.п.).

Для вычисления матрицы A_{ij} проведено моделирование методом Монте-Карло каскадов в калориметре с учетом всех, насколько это возможно, ошибок /2/. Зная в каждом таком событии истинное, хотя и случайное, значение K и вычисленное K', легко получить матрицу A_{ij}. Всего было промоделировано 5 серий каскадов с разными параметрами элементарного акта. Это позволило убедиться в независимости A_{ij} от вида f_j и впоследствии оценить влияние "модельного шума", так как при энергиях $\geq$I Тэв плохо известны отдельные параметры сильных взаимодействий.

Обратные задачи типа (I) относятся к классу некорректных в том смысле, что малые случайные отклонения F_i и A_{ij} от точных $\tilde{F}_i$ и $\tilde{A}_{ij}$ приводят к большим раскачкам решения f_j. Но на практике обычно реализуется именно этот случай. Поэтому был разработан метод, в котором ищется не решение задачи сразу, а плотность вероятностей решения, что более адекватно вероятностному характеру ошибок эксперимента. По ней оценивается решение в качестве математического ожидания и ошибки этой оценки. Из-за линейной зависимости элементов F_i поиск окончательного результата ведется методом итераций.

Вместо уравнения (I) для каждого j напишем N систем из двух уравнений:

$$A_{ij}f_{ij} + \frac{\Phi_i - A_{ij}\varphi_j}{(\sum_j \varphi_j) - \varphi_j}\left[\sum_j f_{ij} - f_{ij}\right] = F_i, \tag{2}$$

$$\left[\sum_i A_{ij} - A_{ij}\right] f_{ij} + \frac{\sum_i \Phi_i - \Phi_i - \varphi_j \sum_i A_{ij} + A_{ij}\varphi_j}{\sum_j \varphi_j - \varphi_j}\left[\sum_j f_{ij} - f_{ij}\right] = $$

$$= \sum_i F_i - F_i.$$

Определитель системы $\Delta_{ij} = (A_{ij}\sum_i \Phi_i - \Phi_i \sum_i A_{ij})/(\sum_j \varphi_j - \varphi_j)$. Здесь φ_j – пробная функция, а $\Phi_i = \sum_j A_{ij}\varphi_j$ – отклик на нее. Пробная функция для первой итерации может быть любой, кроме δ-функции. Запись систем (2) соответствует разбиению функций φ_j, Φ_i, f_j, F_i на две части: на интересующий нас в данный момент элемент и на все остальное. Матрица A_{ij} разбивается соответственно на четыре части.

Разрешив эти системы относительно f_{ij}, получим N значений, которые можно рассматривать как случайные величины, распределенные с некоторой плотностью вероятности. По ним можно оценить математическое ожидание, т.е. величину f_j для данной итерации.

Особенно прост случай, когда все элементы $\geqslant 0$ и предварительно проведены нормировки. Пусть $\sum_j \varphi_j = 1$, $\sum_i F_i = 1$, $\sum_i A_{ij} = 1$ для каждого j. Тогда система (2) вырождается в одно уравнение и $\Delta_{ij} = (A_{ij} - \Phi_i)/(1 - \varphi_j)$ является коэффициентом при f_{ij}. В этом случае $f_{ij} = \varphi_j + \delta_i/\Delta_{ij}$, где $\delta_i = F_i - \Phi_i$. По величинам f_{ij} вычислим среднее взвешенное f_j, вводя веса Δ_{ij}^2, учитывающие свойства матрицы и пробной функции.

$$f_j = \varphi_j + (1 - \varphi_j)\frac{\sum_i \delta_i (A_{ij} - \Phi_i)}{\sum_i (A_{ij} - \Phi_i)^2}$$

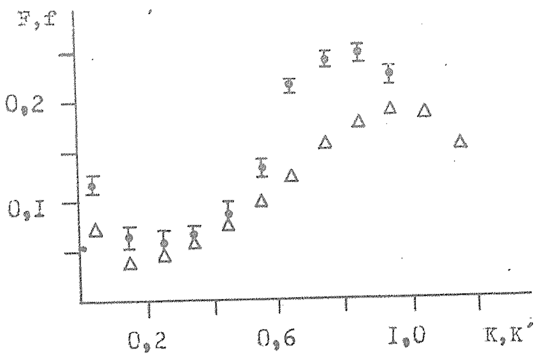
Можно ввести и дополнительные веса, учитывающие неравноточность измерений F_i. Пробной функцией для следующей итерации или конечной оценкой решения, если итерации прекращены, служит

$$\varphi_j^{(n)} = \frac{\varphi_j^{(n-1)} + \alpha f_j^{(n-1)}}{1 + \alpha}$$

а ее среднеквадратичная ошибка

$$\sigma_j = \left\{ \frac{1}{N-1} \left[(1 - \varphi_j)^2 \frac{\sum_i \delta_i^2}{\sum_i (A_{ij} - \bar{\Phi}_i)^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha}(f_j - \varphi_j)^2 \right] \right\}^{1/2}, \quad \alpha > 0$$

Здесь α – параметр сходимости. В начале итерационного процесса его следует брать $<$I и тем меньше, чем хуже точности F_i и A_{ij}. По мере приближения к конечному результату, т.е. с увеличением номера итерации, его можно увеличивать до ∞. Критерием (не единственным) для окончания итераций может служить минимум или выход на константу нормы вектора ошибок $C = (\sum_j \sigma_j^2)^{1/2}$, если исходная система уравнений (I) переопределена. При уменьшении ошибок F_i и A_{ij} конечный результат, полученный по описанной схеме, стремится к точному решению исходной системы уравнений (I), а его ошибки – к нулю.



Р и с. I. Непосредственно полученное $F(K')$ (Δ) и восстановленное описываемым методом $f(K)$ ($\cdot$) распределения

Для решения задачи (I) данным способом не требуется никакой дополнительной информации, кроме предположения о вероятностном характере отклонений F_i и A_{ij} от их точных значений. Метод является естественным расширением методов математической статистики на многомерные объекты – вектора или функции, причем не обязательно одной переменной. Окончательный результат не подвержен раскачке и не нуждается в регуляризации.

Восстановленное по этому методу распределение коэффициентов неупругости $f(K)$ приведено на рис. I, здесь же показано непосредственное полученное распределение $F(K')$. Различие этих распределений доказывает необходимость решения обратной задачи, и не только в данном эксперименте. Такое решение позволяет более полно реализовать все возможности прибора в широком смысле слова.

Поступила в редакцию
26 марта I98I г.

Литература

I. В. П. Павлюченко, С. И. Никольский и др., Труды ФИАН, I09, 30 (I979).

2. А. И. Львов, С. И. Никольский и др., Изв. АН СССР, сер. физ., 44, № 3, 49I (I980).