Краткие сообщения по физике № 10 1981

КОНФОРМНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ГРАДИЕНТНОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В. Н. Зайкин, М. Я. Пальчик

УДК 530.145

Рассмотрен метод решения градиентной модели, основанный на анализе операторного разложения $A_\mu(x_1)\psi(x_2)$ в рамках конформно-инвариантной теории. Рассмотрено парциальное разложение функции Грина $\langle A_\mu A_\nu \psi\bar{\psi}\rangle$.

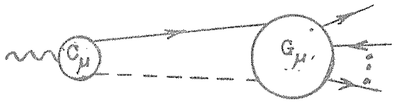
Цель заметки - продемонстрировать некоторые методы конформно-инвариантной теории поля на примере градиентной модели /I/. В заметке рассмотрены: I. Конформный метод /2,3/ решения уравнений модели. 2. Парциальное разложение /3,4/ функций Грина модели. Эти результаты представляют интерес, во-первых, методический и, во-вторых, в связи с тем, что они необходимы для построения конформно-инвариантной электродинамики /5,6/, см. также /7/. Другой подход к градиентной модели развит в /8/.

Уравнение модели имеет вид

$$-\hat{\partial}\psi = \hat{A}\psi, \quad A_\mu = \partial_\mu \varphi. \qquad (I)$$

Здесь и далее используется евклидова формулировка теории поля /9,I0/, так что ψ, A_μ и φ - поля в евклидовом пространстве. Идея метода состоит в следующем. Определим операторное произведение $\hat{A}(x)\psi(x)$ как предел /2,3/: $\hat{A}(x)\psi(x) = \hat{A}(x)\psi(x+\varepsilon)|_{\varepsilon\to 0}$. Для его вычисления воспользуемся операторным разложением $\hat{A}(x)\psi(x+\varepsilon) \sim (1/\varepsilon)\psi(x) + a_1\hat{\partial}\psi(x) + \psi_1(x)$, где ψ_1 - поле с размерностью $d_1 = d + 1$. При совмещении аргументов главный по ε член устраняется перенормировкой массы (подробнее см.

/2,3/). Второй и третий члены дают одинаковый вклад в произведение. В результате получим $\hat{A}(x)\psi(x) = -\hat{\partial}\psi(x) + \psi_1(x)$. Чтобы выполнялось (I), необходимо положить $\psi_1 = 0$. Это условие эквивалентно первому из уравнений (I). В терминах функций Грина условие отсутствия вклада ψ_1 в разложение $\hat{A}(x)\psi(x+\varepsilon)$ имеет вид /3,4/:

$\operatorname{res}_{l=d+1}$ 

$= 0,$ (2)

где $G_\mu(x|x_1\ldots x_n) = \langle A_\mu(x)\psi(x_1)\ldots\bar{\psi}(x_n)\rangle$ – евклидова функция Грина, а C_μ – конформно-инвариантная трехточечная функция с одним векторным концом. В такой форме это уравнение применимо не только к градиентной модели, но и к электродинамике. Дело в том, что общее выражение для C_μ состоит из двух членов /5,6/ $C_\mu = C^l_\mu + (\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu/\Box)\tilde{C}_\nu$ где C^l_μ и $\tilde{C}_\mu$ конформно-инвариантны, причем C^l_μ продольна. Градиентная модель характеризуется тем, что все функции Грина G_μ, входящие в (2), продольны. Это вытекает из второго уравнения (I). Поэтому в выражении для C_μ следует оставить лишь продольный член C^l_μ. Фотонный пропагатор также следует выбрать продольным: $D_{\mu\nu} \sim \partial_\mu\partial_\nu \ln x^2_{12}$. В результате имеем:

$$C_\mu(x_1x_2|x_3) = (x^2_{12})^{-(l+d)/2}\,\partial^{x_3}_\mu\left\{\frac{\hat{x}_{13}}{(x^2_{13})^{(l-d+1)/2}}\,\frac{\hat{x}_{32}}{(x^2_{32})^{(d-l+1)/2}}\right\},$$
$$G^{-1}_1(x) = \hat{x}(x^2)^{-(4-d+1/2)};\quad D^{-1}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu\partial_\nu\delta(x), \tag{3}$$

где G_1 – спинорный пропагатор. Найдем теперь решение уравнения (2).

Рассмотрим функции Грина: $G_2 = \langle\psi(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)\bar{\psi}(x_4)\rangle$, $G^{(2)}_\mu(z|x_1x_2x_3x_4) = \langle A_\mu(z)\psi(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)\bar{\psi}(x_4)\rangle$ Они удовлетворяют тождеству Уорда

$$(1/\eta)\Box^x\partial^x_\mu G^{(2)}_\mu(x|x_1x_2x_3x_4) =$$
$$= e\left[\delta(x-x_1) + \delta(x-x_2) - \delta(x-x_3) - \delta(x-x_4)\right]G_2. \tag{4}$$

Из (2) и (4) получается замкнутое уравнение для G_2. Подставим $G_\mu^{(2)}$ и C_μ в (2). Имеем:

$$\int dx_5 dx_6 dx_7 dx_8 C_\mu(x_1 x_5 | x_6) G^{-1}(x_{57}) D_{\mu\nu}^{-1}(x_{68}) G_\nu^{(2)}(x_8 | x_7 x_2 x_3 x_4) \sim \tag{5}$$

$$\sim \int dx_6 dx_7 dx_8 \frac{1}{(x_{16}^2)^{\frac{1+d}{2}-2}} \frac{\hat{x}_{17}}{(x_{17}^2)^{5/2+\frac{1-d}{2}}} \frac{1}{(x_{67}^2)^{2-\frac{1+d}{2}}} \times \tag{6}$$
$$\times \partial_\mu^{x_6} \Box^{x_6} \delta(x_{68}) G_\mu^{(2)}(x_8 | x_7 x_2 x_3 x_4).$$

При переходе от (5) к (6) вычислен интеграл по x_5 с помощью известного соотношения, а также взят интеграл по частям по x_6. После снятия интеграла по x_8 в (6) и использования тождества Уорда (4) легко вычисляется интеграл по x_6. Оставшийся интеграл по x_7 вычисляется после подстановки в (2) с помощью соотношения $\underset{l=d+1}{\mathrm{res}} \; \hat{x}_{17}/(x_{17}^2)^{5/2+\frac{l-d}{2}} \sim \hat{\partial}^{x_7} \delta(x_{17})$. В результате получим замкнутое уравнение для G_2:

$$-\hat{\partial}_{x_1} G_2(x_1 x_2 x_3 x_4) = (2d-3)\left[\frac{\hat{x}_{12}}{x_{12}^2} - \frac{\hat{x}_{13}}{x_{13}^2} - \frac{\hat{x}_{14}}{x_{14}^2}\right] G_2(x_1 x_2 x_3 x_4). \tag{7}$$

Единственное конформно-инвариантное решение этого уравнения есть $G_2(x_1 x_2 x_3 x_4) = G(x_{13}) \otimes G(x_{24}) \left(\dfrac{x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{12}^2 x_{34}^2}\right)^{3/2-d} - (x_2 \leftrightarrow x_4)$, что совпадает с известным решением /I0/ продольной электродинамики.

Найдем далее зависимость размерности d от заряда и калибровки. Для этого рассмотрим функцию Грина $G_{\mu\nu}(x_1 x_2 | x_3 x_4) = \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) A_\mu(x_3) A_\nu(x_4) \rangle$, удовлетворяющую тождеству Уорда

$$(1/\eta) \partial_\nu^{x_4} \Box^{x_4} G_{\mu\nu}(x_1 x_2 | x_3 x_4) = e[\delta(x_{14}) - \delta(x_{24})] G_\mu^{(1)}(x_3 | x_1 x_2) + \tag{8}$$
$$+ \partial_\mu^{x_4} \delta(x_{34}) G_1(x_{12}),$$

где

$$G_\mu^{(1)}(x_3|x_1x_2) = \langle\psi(x_1)\bar\psi(x_2)A_\mu(x_3)\rangle = \tag{9}$$

$$= (\eta e/4\pi^2)\partial_\mu^{x_3}\ln(x_{23}^2/x_{13}^2)G_1(x_{12}).$$

В качестве $G_\mu^{(1)}(x_3|x_1x_2)$ взято продольное конформно-инвариантное выражение, а коэффициент пропорциональности найден из соответствующего тождества Уорда. Подставим теперь $G_{\mu\nu}$ в (2). Произведя с помощью (8) те же выкладки, что и при выводе (7), получим

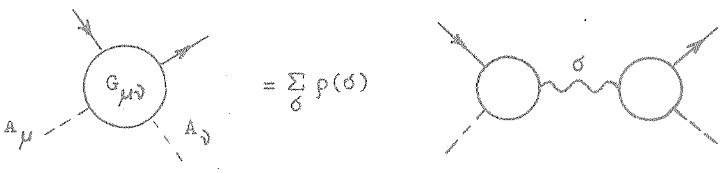
$$-\hat\partial_{x_1}G_\mu^{(1)}(x_3|x_1x_2) = (2d-3)\frac{\hat x_{12}}{x_{12}^2}G_\mu^{(1)}(x_3|x_1x_2) +$$

$$+\frac{2d-3}{e}\partial_\mu^{x_3}\frac{\hat x_{13}}{x_{13}^2}G_1(x_{12}).$$

Подставляя сюда явный вид функций Грина $G_\mu^{(1)}$ и G_1, получим известное выражение

$$d = 3/2 + \eta e^2/16\pi^2. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь вопрос о происхождении полюса в точке $l = d + 1$. Представим $G_{\mu\nu}$ в виде парциального разложения /3,4/

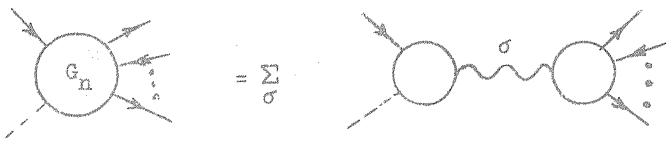


(II)

Рассмотрим спинорный вклад в (II). Явное выражение для $\rho(\sigma)$ при $s = 1/2$ можно найти из тождества Уорда (8) методом, предложенным в /II/. Результат есть

$$\rho(l,1/2) = \frac{\eta}{32\pi^6}\frac{1}{(l+d-2)(l+d-6)}\frac{\Gamma\left(\frac{d-l+5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l-d+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l-d+5}{2}\right)}\times$$
$$\times\left\{\frac{\eta e^2}{8\pi^2}\frac{1}{(l+d-1)}\frac{\Gamma\left(d+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l-d+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{6-l-d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-d\right)\Gamma\left(\frac{d-l+5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+d}{2}\right)}-1\right\}. \tag{I2}$$

Это выражение имеет полюс в точке $l = d + 1$. Из вывода (I2) ясно, что этот полюс является следствием тождества Уорда. Роль динамических уравнений состоит в компенсации этого полюса. Если потребовать, чтобы выражение в фигурных скобках обратилось в ноль и компенсировало полюс, мы получим (I0). Аналогичным образом можно показать, используя тождества Уорда, что в разложении высших функций Грина



также имеется этот полюс. Условие его сокращения выражается в виде уравнений типа (7).

В заключение отметим, что в модели Тирринга также имеется аналогичный полюс. В отличие от градиентной модели он приводит к появлению /I2/ поля ψ_1, которое дает вклад в $j_\mu(x)\psi(x+\varepsilon)$, но не в $\hat{j}(x)\psi(x+\varepsilon)$. Такое неполное сокращение полюса связано с наличием поперечных частей, отсутствующих в градиентной модели.

Авторы благодарят Е. С. Фрадкина за обсуждения.

Поступила в редакцию
20 апреля 1981 г.

Литература

1. D. Zwanziger, Phys. Rev., D17, 457 (1978).

2. М. Я. Пальчик, Лекция на III Школе по физике высоких энергий и элементарных частиц, Приморско, Болгария, 1977 г.

3. E. S. Fradkin, M. Ya. Palchik, Phys. Rep., 44, N 5,249(1978).
4. I. T. Todorov, M. C. Mintchev, V. B. Petkova, Conformal Invariance in Quantum Field Theory, Pisa, 1978.
5. М. Я. Пальчик, Препринт Института автоматики и электрометрии СО АН СССР № I44, Новосибирск, I98I г.
6. А. А. Кожевников, М. Я. Пальчик, А. А. Померанский, Препринт Института автоматики и электрометрии СО АН СССР № I45, Новосибирск, I98I г.
7. Hadjiivanov, S. G. Mikhov, D. T. Stoyanov, J. Phys., A12,119 (1979).
8. С. И. Златев, Г. М. Сотков, Д. Ц. Стоянов, Препринт ОИЯИ Р2-I2800, г. Дубна, I979 г.
9. I. S. Schwinger, Phys. Rev., 115, 728 (1959); Е. С. Фрадкин, ДАН СССР I25, 3II (I959).
I0. Е. С. Фрадкин, Труды ФИАН, 29, 3 (I965).
11. E. S. Fradkin, M. Ya. Palchik, Nucl. Phys., B99, 317(1975).
I2. М. Я. Пальчик, Краткие сообщения по физике ФИАН № 4, I6 (I980).