Краткие сообщения по физике № 11 1981.

АСИМПТОТИКА ДИНАМИЧЕСКИХ МАСС КВАРКОВ В КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ

Н. В. Красников, А. А. Пивоваров

УДК 539.12.01

На основе использования уравнения Дайсона-Швингера найдена асимптотика динамических масс кварков в квантовой хромодинамике в ультрафиолетовой области

$$m_D(p) = \frac{\langle\bar{q}q\rangle}{3}\,\frac{g^2(p^2/\mu^2, g_R^2)}{p^2}\left(\frac{g^2(p^2/\mu^2, g_R^2)}{g_R^2}\right)^{-d}.$$

Вычислено значение псевдоскалярной константы связи f_π π-мезона.

Впервые в работах /1,2/ было показано, что в квантовой теории поля может иметь место возникновение динамической массы. Однако изучение проблемы возникновения динамической массы неизбежно сталкивается с необходимостью выхода за рамки теории возмущений, что, ввиду отсутствия в теории поля последовательных методов, отличных от теории возмущений, представляет собой весьма нетривиальную задачу.

В настоящей работе мы покажем, что в силу свойства асимптотической свободы квантовой хромодинамики можно надежно определить зависимость динамических масс кварков от импульса в ультрафиолетовой области, и найдем эту зависимость. Вычисления будем проводить в евклидовом пространстве-времени, в калибровке Ландау, использование которой весьма удобно, поскольку в ведущем логарифмическом приближении свободный безмассовый пропагатор кварка не перенормируется.

Уравнение Дайсона - Швингера для кваркового пропагатора $G(p)$ имеет вид

$$G^{-1}(p) = S^{-1}(p) + \frac{g^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\Gamma^a_\mu(p,k)G(k)D_{\mu\nu}(p-k)\gamma_\nu(\lambda^a/2). \quad (1)$$

Здесь $S(p)$ – пропагатор свободных кварков, $\lambda^a/2$ – генераторы фундаментального представления группы $SU(N)$. Уравнение (1) написано для неперенормированных величин. Производя перенормировку, получаем

$$Z_2^{-1}G_R^{-1}(p) = S^{-1}(p) + \frac{g_R^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\Gamma^{aR}_\mu(p,k)G_R(k)D^R_{\mu\nu}(p-k)\gamma_\nu(\lambda^a/2),$$

где Z_2 – константа перенормировки пропагатора кварка. В калибровке Ландау $Z_2 = 1 + O(g_R^4)$, поэтому в ведущем логарифмическом приближении мы можем положить $G^{-1}(p) = m(p^2) - \hat{p}$ и для величины $m(p^2)$ получаем уравнение

$$m(p^2) = \frac{4}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{m(k^2)\bar{g}^2[(p-k)^2]}{[m^2(k^2)+k^2](p-k)^2},$$

где

$$\bar{g}^2(p^2) \equiv \bar{g}^2(p^2/\mu^2, g_R^2) = g_R^2\left[1 + (11 - 2N/3)\,\frac{g_R^2}{16\pi^2}\ln\frac{p^2}{\mu^2}\right]^{-1} -$$

эффективная кварк-глюонная константа связи. После интегрирования по угловым переменным с точностью до членов второго порядка по $\bar{g}^2(p^2)$ получаем

$$m(p^2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{p^2}^{\infty}\frac{\bar{g}^2(k^2)m(k^2)dk^2}{m^2(k^2)+k^2} + \frac{\bar{g}^2(p^2)}{4\pi^2p^2}\int_0^{p^2}\frac{m(k^2)k^2dk^2}{m^2(k^2)+k^2}. \quad (2)$$

Путем несложных преобразований уравнение (2) приводится к виду

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{4\pi^2x(dm(x)/dx)}{\bar{g}^2(x)}\right] = -\frac{m(x)x}{m^2(x)+x}, \quad x \equiv p^2.$$

Учитывая, что

$$(33 - 2N)\bar{g}^2(x) = 48\pi^2/\ln(x/\Lambda^2),$$

и производя замену переменных $x/\Lambda^2 = \exp t$, получаем

$$\frac{d^2\Sigma(t)}{dt^2} + (1 + \frac{1}{t})\frac{d\Sigma(t)}{dt} + d\,\frac{\Sigma(t)}{t}\left[1 + \Sigma^2(t)\Lambda^2\exp(-t)\right]^{-1} = 0, \quad (3)$$

где $d = 12/(33 - 2N)$, $\Sigma(t) \equiv m(x)$.

Мы ищем ограниченные при $t \to \infty$ решения уравнения (3), поэтому в асимптотической области можно пренебречь нелинейностью, после чего решение имеет вид

$$\Sigma(t) = \exp[-t/2 - (1/2)\ln t]\left[\tilde{C}_1 W_{-d+1/2,0}(-t) + \tilde{C}_2 W_{d-1/2,0}(t)\right],$$

где $W_{\lambda,\mu}(z)$ – функции Уиттекера, асимптотика которых имеет вид

$$W_{\lambda,\mu}(z)\big|_{|z|\to\infty} = \exp(-z/2)z^{\lambda}[1 + O(1/z)]. \quad (4)$$

Используя (4), получаем асимптотику двух линейно независимых решений уравнения (3)

$$m_1(x)\big|_{x\to\infty} \sim C_1\ln^{-d}(x/\Lambda^2)$$

и

$$m_2(x)\big|_{x\to\infty} \sim (C/x)\ln^{d-1}(x/\Lambda^2) \quad (5)$$

Для определения констант C_I и C воспользуемся сравнением с теорией возмущений. Потребуем малости непертурбационных поправок в асимптотической области в виде $m(p^2) - \bar{m}(p^2) = o(\bar{m}(p^2))$, $p^2 \to \infty$, где $\bar{m}(p^2) = m_R(\bar{g}^2(p^2)/\bar{g}^2(\mu^2))^d$ – обычное выражение для эффективной массы кварка в ренормгрупповом анализе. Тогда $C_1 = m_R\ln^d(\mu^2/\Lambda^2)$.

Для определения C используем теорию возмущений при $m_R = 0$ с феноменологическим учетом непертурбационных эффектов посредством $\langle\bar{q}q\rangle \neq 0$. Во втором порядке теории возмущений с учетом ненулевого вакуумного среднего $\langle\bar{q}q\rangle$ имеем

$$\mathrm{tr}\,G(p) = -(4/3)\langle\bar{q}q\rangle g_R^2/(p^2)^2.$$

С другой стороны, использование явного вида массового оператора (5) дает

$$\mathrm{tr}\, G(p) = 4C\left[g_R^2/(p^2)^2\right]\ln^d(\mu^2/\Lambda^2)(33 - 2N)/(48\pi^2).$$

Сравнивая эти выражения, получаем

$$C = -1/3\langle\bar{q}q\rangle \ln^{-d}(\mu^2/\Lambda^2)48\pi^2/(33 - 2N). \qquad (6)$$

Используя найденное выражение для динамической массы (5) с константой C, фиксированной соотношением (6), мы вычисляем константу связи π-мезона f_π, определенную выражением

$$\langle 0|A_\mu^a(0)|\pi^b(\vec{k})\rangle = ik_\mu f_\pi \delta^{ab}, \quad k^2 = m_\pi^2$$

(где $|\pi^a(\vec{k})\rangle$ — однопионное состояние, A_μ^a — изовекторный аксиальный ток), с помощью представления, полученного Джонсоном и Джекивом /3/ и использованного ранее для аналогичных вычислений в работе /4/

$$f_\pi^2 = \frac{3}{(2\pi)^2}\int\limits_0^\infty dx\,\frac{x[m(x) - (x/2)dm(x)/dx]m(x)}{[m^2(x) + x]^2}. \qquad (7)$$

Для численного анализа необходимо знать величину вакуумного среднего $\langle\bar{q}q\rangle$. Методы алгебры токов позволяют связать ее с массами кварков, что приводит к оценке $\langle\bar{q}q\rangle = -(250\ \text{МэВ})^3$. Тогда соотношение (7) дает $f_\pi = 77$ МэВ. Используя экспериментальное значение $f_\pi = 93$ МэВ, можно обратить задачу и получить $|\langle\bar{q}q\rangle| = (310\ \text{МэВ})^3$. Отметим, что таким способом нельзя определить знак вакуумного среднего $\langle\bar{q}q\rangle$.

Заметим, что динамическая масса $m(p)$, вообще говоря, зависит от калибровки. К сожалению, нам не удалось решить уравнение (I) в произвольной калибровке. Представление Джонсона – Джекива /3/ для f_π является калибровочно-инвариантным и в калибровке Ландау имеет вид (7). Поэтому полученное нами значение f_π, естественно, не зависит от калибровки.

Авторы благодарны А. Н. Тавхелидзе за интерес к работе.

Поступила в редакцию
3 апреля 1981 г.

Литература

1. Б. А. Арбузов, А. Н. Тавхелидзе, Р. Н. Фаустов, ДАН СССР, 139, 345 (1961). В.Г. Вакс, А. И. Ларкин, ЖЭТФ, 40, 282 (1961).
2. Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, Phys. Rev., 122, 345 (1961); Phys. Rev., 124, 246 (1961).
3. R. Jackiw, K. Johnson, Phys. Rev., D8, 2386 (1973).
4. H. Pagels, S. Stokar, Phys. Rev., D20, 2947 (1979).