Краткие сообщения по физике № 11 1981

О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОГО ПОДХОДА В КЛАССИЧЕСКОЙ ОПТИКЕ

В. К. Потехин, Л. А. Шелепин

УДК 535.33

Показана возможность использования в оптике теоретико-групповых методов, включая аппарат теории представлений и матриц конечных преобразований групп SU(n). Для сложных многомодовых волн указаны определенные сохраняющиеся величины и отмечена аналогия развиваемого подхода с известной моделью Дике.

В последнее время в оптике, наряду с быстрым развитием алгебраических методов /I,2/, появились попытки применения теоретико-группового подхода. Так, в работе /3/ для описания статистических свойств квазимонохроматических полей была использована группа вращений. Цель настоящей заметки – показать возможность эффективного применения теоретико-групповых методов и наличие скрытых симметричных характеристик на примере поляризационных свойств полихроматического поля излучения.

Рассмотрим поляризационную матрицу

$$J = \begin{pmatrix} (\vec{E}_1\vec{E}_1^+) & ([\vec{E}_1\vec{E}_2^+]\vec{e}_3) \\ -([\vec{E}_2\vec{E}_1^+]\vec{e}_3) & (\vec{E}_2\vec{E}_2^+) \end{pmatrix}, \tag{I}$$

где $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ – компоненты вектора (спинора) двумерного комплексного пространства $C(2)$, на базисе действительных единичных векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; $\vec{e}_3$ – направление плоской волны. Эта матрица (ср.с/2,3/) позволяет описать плоскую однородную электромагнитную волну посредством параметров Стокса s_0, s_1, s_2, s_3, идентифицирующих интенсивность s_0 и поляризационное состояние s_i,

s_2, s_3. При этом J может быть представлено в виде:

$$J = (1/2)(s_0\sigma_0 + s_1\sigma_1 + s_2\sigma_2 + s_3\sigma_3), \qquad (2)$$

где σ_1, σ_2, σ_3 – матрицы Паули, σ_0 – единичная матрица. В случае сохранения энергии волны ее поляризационное состояние задается точкой на сфере Пуанкаре радиуса s_0, а эволюция состояния – движением конца вектора Стокса $\vec{s}$ по сфере.

В непоглощающей и неусиливающей среде результат прохождения плоской электромагнитной волны сводится к ее преобразованию по неприводимому представлению $D(1/2)$ группы $SU(2)$, т.е. соответствующая матрица представления, задающая действие среды, может быть отождествлена с некоторым преобразователем-прибором.

На сфере Пуанкаре преобразованию $D(1/2)$ группы $SU(2)$ соответствует представление $D(1)$, по которому преобразуется вектор Стокса $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$. Матрица $D(1)$ задает группу $O(3)$ преобразований пространства на базисе матриц Паули $\{\sigma_i\}$ $i = 1,2,3$.

Базис $\{\sigma_i\}$ является полным относительно группы преобразований $O(3)$, поэтому число принципиально различных приборов-преобразователей, сохраняющих энергию пучка s_0, равно двум. Этими двумя приборами являются: компенсатор $C(\varphi)$, обусловливающий относительный сдвиг φ фаз x-, y-компонент луча, а в стоксовом пространстве – поворот вокруг оси s_1 на угол 2φ, и вращатель $R(\theta)$ плоскости поляризации в осях x,y на угол θ и на угол 2θ вокруг оси s_3 пространства Стокса. Другие преобразователи есть последовательное применение этих приборов.

Приборы типа аттенюатора, поляризаторов и усилителей не сохраняют значения s_0 и требуют для своей классификации расширенную группу преобразований $SL(2)$. В рамках группы преобразований $SU(2)$ число принципиально различных приборов-преобразователей равно трем, поскольку на совокупность четырех параметров группы накладывается условие сохранения энергии пучка. Наряду с вышеуказанными приборами $C(\varphi)$ и $R(\theta)$ здесь появляется принципиально отличный от них прибор-фазовращатель $\Phi(\psi)$, обусловливающий изменение оптической длины пути на величину ψ. В стоксовом пространстве это соответствует повороту вокруг оси $\vec{s}$.

Отметим, что в некоторых работах см., например, /2/), фазовращателем называется вращатель $R(\theta)$.

Все сказанное выше относилось к квазимонохроматическим волнам. Анализ волн, обладающих сложной многомодовой поляризационной структурой, связан уже с использованием представлений $D(j)$ группы $SU(2)$ с $j>1$.

Рассмотрим прохождение n-модовой (n-частотной) волны через линейную среду. Для этого процесса имеются определенные инвариантные характеристики. Так волна, состоящая из двух независимых мод, каждая из которых задается поляризационным представлением $D(j)$, может быть сопоставлена с представлением

$$D(1) \otimes D(1) = D(2) \oplus D(1) \oplus D(0), \qquad (3)$$

т.е. описываться совокупностью неприводимых представлений $D(2)$, $D(1)$, $D(0)$. Соответственно, трехмодовая волна может характеризоваться представлениями, входящими в разложение

$$[D(1)]^3 = D(3) \oplus 2D(2) + 3D(1) + D(0). \qquad (4)$$

Конкретное построение базисов этих представлений может быть проведено по стандартным правилам /4/.

Среда, через которую проходит n-модовая волна, описываемая совокупностью $D(j)$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), играет роль матрицы конечных вращений $D^j_{mm'}$ ($m, m' = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$). Чрезвычайно важно то обстоятельство, что "квантовое" число j – сигнатура представления (или, в общем случае, набор чисел) – сохраняется, т.е. волна, обладающая определенным набором мод, может иметь своего рода скрытые свойства поляризационной симметрии при прохождении через вещество.

Отметим здесь далеко идущую аналогию с теоретико-групповой моделью Дике для системы N двухуровневых молекул, в которой проводилась классификация состояний по представлениям групп $SU(2)$. Принципиальное значение модели Дике заключалось в сохранении кооперативного числа R (сигнатуры представления) при радиационных переходах. В предлагаемой модели при прохождении через среду сохраняется число j. Подобно тому как столкновительные переходы перемешивают состояния с различными R, здесь

j не сохраняется при межмодовом нелинейном взаимодействии.

Существенной стороной рассматриваемого подхода является возможность использования аппарата теории представлений, включая конечные преобразования. Исследование поляризационных свойств – это только один из возможных примеров. В принципе, если не ограничиваться требованием сохранения энергии волны s_0, можно использовать группу SL(2). Четырехмерный вектор s_0, s_1, s_2, s_3 описывается представлением D(1/2, 1/2) группы Лоренца. Тогда поляризационно-энергетические структуры n-модовых волн задаются разложением представления $[D(1/2, 1/2)]^n$ на неприводимые компоненты. Это расширение группы дает возможность рассматривать также усиливающие и поглощающие среды.

Поступила в редакцию
18 июня 1981 г.

Литература

1. Ф. И. Федоров, Теория гиротропии, "Наука и техника", Минск, 1976 г.
2. Я. Перина, Когерентность света, "Мир", М., 1979 г.
3. В. К. Потехин, Л. А. Шелепин, Краткие сообщения по физике ФИАН № 5, 31 (1978).
4. Г. Я. Любарский, Теория групп и ее применение в физике, Гостехиздат, М., 1957 г.