УДК 530.1

АНАЛОГ ФОРМУЛ КИРХГОФА В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Н. А. Жура

Получен аналог формул Кирхгофа для электромагнитных волн. Как следствие, получена формулировка принципа Гюйгенса в свободном пространстве и изучена связь с известными представлениями решения системы Максвелла через скалярный и векторный потенциалы.

Одной из важных задач максвелловской теории электромагнитного поля является задача определения его динамики под действием внешнего поля (тока) при условии, что само поле известно в некоторый начальный момент времени. Классический метод решения этой задачи основан на представлении искомого поля через так называемые скалярный φ и векторный ψ потенциалы (вместо ψ обычно используют A), динамика которых определяется соответствующими волновыми уравнениями [1, с. 212], [2, с. 85], [3, с. 10].

В настоящей заметке развит прямой подход к этой задаче, не связанный с введением потенциалов. Он основан на использовании разложения Гельмгольца произвольного, достаточно гладкого поля, исчезающего на бесконечности, на сумму соленоидального и потенциального полей с последующим применением преобразования Фурье по пространственным переменным.

В п. 1 заметки получен аналог известных для волнового уравнения формул Кирхгофа для однородной системы Максвелла, а в п. 2 – для неоднородной. В п. 3 рассмотрена связь с классическим подходом, использующим потенциалы.

1. Рассмотрим систему уравнений в частных производных первого порядка

$$i\partial u/\partial t = \alpha \operatorname{rot} u - if, \quad \operatorname{div} u = \rho, \quad t > 0, \tag{1}$$

где искомая $u = u_1 + iu_2$ и заданная $f = f_1 + if_2$ комплекснозначные вектор-функции имеют по три компоненты, $\rho = \rho_1 + i\rho_2$ – скалярная комплекснозначная функция, а постоянная $\alpha > 0$.

Система (1) вполне определяет динамику поля $u(t,x)$, если только известно его значение в некоторый момент времени (принимаемый далее за нулевой)

$$u(0,x) = g(x). \tag{2}$$

В обозначениях $u_1 = \sqrt{\varepsilon}E$, $u_2 = \sqrt{\mu}H$, $\alpha = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, где $\varepsilon > 0$ и $\mu > 0$ – постоянные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, а c – скорость света в вакууме, эта система принимает вид

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{rot} H - \frac{4\pi}{c}j_1, \quad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{rot} E + \frac{4\pi}{c}j_2, \tag{$\tilde{1}$}$$

$$\operatorname{div}\varepsilon E = 4\pi\rho_1, \quad \operatorname{div}\mu H = 4\pi\rho_2.$$

Фигурирующие в (1) функции f и ρ связаны с вещественными функциями j_1, j_2 и ρ_1, ρ_2 соотношениями

$$4\pi j_1 = \sqrt{\varepsilon}f_1, \quad 4\pi j_2 = \sqrt{\mu}f_2 \text{ и } 4\pi\rho_1 = \sqrt{\varepsilon}\rho_1, \quad 4\pi\rho_2 = \sqrt{\mu}\rho_2.$$

При этом обычно ρ_2 называют "магнитным" зарядом, а j_2 – "магнитным" током. Заметим, что ρ_2 служит источником потенциального поля. Литература по такой электродинамике к настоящему времени достаточно обширна. Ограничимся здесь лишь ссылками [4], [7], [8]. В последних двух из них можно найти и дополнительные ссылки.

Когда j_1 и j_2 (а также ρ_1 и ρ_2) связаны линейным соотношением, а $\varepsilon = \mu = 1$, эта система рассматривалась в [4]. При $\rho_2 = 0$, $f_2 = 0$ и $\operatorname{div} Img{=}0$, где символ Im обозначает мнимую часть соответствующей величины, система ($\tilde{1}$) описывает динамику классического электромагнитного поля, создаваемого распределенными зарядами и токами в однородной изотропной среде.

Пусть вначале $f = 0$ и $\rho = 0$ в (1), а начальное поле $g(x)$ гладкое и убывает на бесконечности вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|x|^{-k}$, $k \geq 0$, где $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Другими словами, оно принадлежит известному классу Шварца $S(\mathbb{R}^3)$. Кроме того, предположим, что оно соленоидально, так что $\operatorname{div} g(x) = 0$.

Пусть $(M\chi)(r,x)$ – среднее значение функции χ по сфере $\sigma(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |x-y| = r\}$, радиуса $r > 0$ с центром в точке x:

$$(M\chi)(r,x) = \left(\int\limits_{\sigma(x,r)} \chi(y)d\sigma \right) / 4\pi r^2, \tag{3}$$

где $d\sigma$ – элемент площади ее поверхности.

Тогда *для решения задачи (1), (2) имеет место следующая формула*

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t(Mg)(t,x)\right) - i\alpha t\left(M \operatorname{rot} g\right)(t,x), \quad t > 0. \tag{4}$$

Доказательство этой формулы можно провести методом Фурье. Действительно, применяя его к задаче (1), (2) приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений ($k \in \mathbb{R}^3$)

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \alpha[k, \hat{u}], \quad (k, \hat{u}) = 0, \ (u(0,x))^\wedge = \hat{g}(k). \tag{5}$$

Здесь $\hat{u}(t;k) = \int u(t,x)\exp(-i(k,x))dx$ – преобразование Фурье вектор-функции u по пространственным переменным, а $[\cdot,\cdot]$ и $(\cdot,\cdot)$ – обозначают операции векторного и скалярного произведений трехмерных векторов. Решением системы (5) является вектор-функция

$$\hat{u}(t,k) = \alpha\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin(\alpha t|k|)}{|k|}\cdot\hat{g}(k) + \frac{\sin(\alpha t|k|)}{|k|}[k, \hat{g}(k)]. \tag{6}$$

Используя известное выражение для преобразования Фурье δ-функции с носителем на сфере и применяя теорему о преобразовании Фурье свертки, приходим к формуле (4).

После того, как формула (4) получена, она может быть доказана и непосредственно, вполне аналогично доказательству формул Кирхгофа для скалярного волнового уравнения.

Имеющий место для скалярного волнового уравнения *принцип Гюйгенса в свободном пространстве [5] остается в силе и для системы Максвелла, с тем лишь изменением, что для задачи (1), (2) решение в точке (t,x) вполне определено значениями g и $\operatorname{rot} g$ на сфере $\sigma(x,r)$, где $r = \alpha t$.*

Поскольку пространство $S(\mathbb{R}^3)$ плотно в L^2, то, как нетрудно видеть, все результаты остаются в силе и в случае, когда решения разыскиваются в классе полей, для которых как $u(t,x)$, так и $\operatorname{rot} u(t,x)$ интегрируемы с квадратом модуля. При этом предполагается, что и исходные данные задачи принадлежат к этому же классу. Аналогичным образом эти результаты распространяются и на соответствующий класс умеренно растущих распределений (обобщенных функций).

Нетрудно видеть, что при всех $t > 0$ имеет место закон сохранения энергии

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |u(t,x)|^2\, dx = \text{const},$$

причем постоянной в правой части последнего тождества совпадает с "начальной" энергией $\int_{\mathbb{R}^3} |g(x)|^2\, dx$.

Одним из следствий этого является вероятностная интерпретация решений системы (1), если нормировать начальное поле условием

$$\int_{\mathbb{R}^3} |g(x)|^2\, dx = 1.$$

Подчеркнем, что широко используемые в эвристических рассуждениях решения типа плоских волн $ae^{i(k,x)}$, где a – некоторый постоянный вектор, не являются элементами пространств S (и L^2) и поэтому здесь не рассматриваются.

2. Рассмотрим теперь динамику поля $u(t,x)$, удовлетворяющего общей системе (1) с начальным условием (2).

Искомое поле u в этом случае разыскиваем в виде

$$u = v + w, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \operatorname{rot} w = 0, \tag{7}$$

где v – соленоидальное, а w – потенциальное поля, исчезающие на бесконечности.

Заданные поля f и g также представим в аналогичной форме

$$f = f_0 + \tilde{f}, \quad g = g_0 + \tilde{g}, \tag{8}$$

где $\operatorname{div} f_0 = \operatorname{div} g_0 = 0$ и $\operatorname{rot} \tilde{f} = \operatorname{rot} \tilde{g} = 0$.

Тангенциальные поля в разложении (8) следует считать известными, поскольку решением системы уравнений

$$\operatorname{div} w = \rho, \quad \operatorname{rot} w = 0 \tag{9}$$

является функция

$$w = e * \rho, \tag{10}$$

где $e(x) = x/4\pi|x|^3$ – фундаментальное решение системы (9), где ρ следует заменить на δ-функцию Дирака, а символ $*$ здесь и ниже обозначает операцию свертки по пространственным переменным. Соленоидальные поля f_0 и g_0 также могут быть определены в явном виде, поскольку решением системы

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \operatorname{rot} v = f_0 \tag{11}$$

является функция

$$v = -e_0 * \operatorname{rot} f_0 = -\omega(e) * f_0, \tag{12}$$

где $e_0(x) = -1/4\pi|x|$ – фундаментальное решение оператора Лапласа $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$, а кососимметрическая матрица

$$\omega(e) = \begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим еще, что $e = \operatorname{grad} e_0$.

Фигурирующее в разложении (7) поле $w(t,x)$ есть решение системы (9), удовлетворяющее условиям

$$w_t = \tilde{f}, \quad w(0,x) = \tilde{g}(x). \tag{13}$$

Система (9), (13) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда функции f и ρ удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} f = 0, \quad t > 0, \tag{14}$$

$$\rho(0,x) = \operatorname{div} g(x), \tag{15}$$

при этом ее решение имеет вид (10).

Поле $w(t,x)$ уместно назвать квазистационарным потенциальным полем. Если функцию ρ считать неизвестной, то (14) служит для ее определения, а (15), являющееся условием согласования, служит начальным условием.

Динамика соленоидального поля $v(t,x)$, фигурирующего в (7), определяется условиями

$$iv_t = \operatorname{rot} v - if_0, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad t > 0, \tag{16}$$

$$v(0,x) = g_0(x), \quad t = 0. \tag{17}$$

Решение этой задачи может быть представлено в виде

$$v(t,x) = v_0(t,x) + v_*(t,x), \tag{18}$$

где поле $v_0(t,x)$ определено формулой (4), в которой g следует заменить на g_0.

Что же касается поля v_*, то оно является решением системы (16), удовлетворяющим нулевому начальному условию. Применяя к этой задаче принцип Дюамеля и проводя некоторые дополнительные преобразования, приходим к справедливости следующего утверждения.

Пусть $h_0 = i\partial f_0/\partial\nu + \operatorname{rot} f_0$, где $\partial/\partial\nu$ – дифференцирование по направлению внешней нормали ν к сфере $\sigma(x,r)$, $r=\alpha t$, являющейся границей шара $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |x-y| < r\}$ радиуса $r = \alpha t$ с центром в точке x.

Тогда *имеет место следующая формула*

$$v_*(t,x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{B(x,\alpha t)}\left(\frac{h_0(t-|x-y|/\alpha,y)}{|x-y|} + \frac{f_0(t-|x-y|/\alpha,y)}{|x-y|^2}\right)dy. \tag{18}$$

Поскольку $u = v_0 + v_* + w$, то *совокупность формул (4), (10), (18) полностью определяет динамику поля, удовлетворяющего системе (1), (2).*

3. Поскольку, как уже отмечалось выше, классический метод в исследованиях по теории электромагнитного поля связан с использованием потенциалов, представляется целесообразным выяснить его связь с прямым подходом п. 1, п. 2.

Если f и ρ в (1) вещественны, эта система в вещественной записи принимает форму

$$\partial u_1/\partial t = \alpha \operatorname{rot} u_2 - f, \quad \partial u_2/\partial t = -\alpha \operatorname{rot} u_1, \tag{19}$$

$$\operatorname{div} u_1 = \rho, \quad \operatorname{div} u_2 = 0, \quad t > 0,$$

и в обозначениях п. 1, как уже отмечалось, совпадает с классической системой Максвелла. Предположим еще, что фигурирующее в начальных условиях

$$u_1(0,x) = g_1(x), \quad u_2(0,x) = g_2(x), \tag{20}$$

поле $g_2(x)$ соленоидально, так что $\operatorname{div} g_2(x) = 0$, и выполнены условия (14), (15).

В рамках классического подхода решения системы (19) разыскивают [1 – 3] в виде

$$u_1 = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \alpha \operatorname{grad}\varphi, \quad u_2 = \operatorname{rot}\psi, \quad t > 0, \tag{21}$$

где скалярный φ и векторный ψ потенциалы связаны условием лоренцевской калибровки

$$\partial\varphi/\partial t + \operatorname{div}\psi = 0, \quad t \geq 0. \tag{22}$$

Подстановка (21) в (19) приводит к уравнениям

$$\partial^2\varphi/\partial t^2 - \alpha^2\Delta\varphi = \alpha\rho, \quad \partial^2\psi/\partial t^2 - \alpha^2\Delta\psi = \alpha f, \quad t > 0 \tag{23}$$

для потенциалов φ и ψ соответственно. Здесь $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$ – оператор Лапласа.

Как хорошо известно, потенциалы φ и ψ ввиду связи (22) определены неоднозначно. Произвол в их выборе связан с инвариантностью уравнений (19) относительно калибровочных преобразований [6]

$$\psi \longmapsto \tilde{\psi} = \psi + \alpha \mathrm{grad}\,\varphi,$$

$$\varphi \longmapsto \tilde{\varphi} = \varphi - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t},$$

где θ – произвольное решение волнового уравнения

$$\partial^2\theta/\partial t^2 - \alpha\Delta\theta = 0.$$

Таким образом произвол полностью устраняется заданием двух произвольных функций $\theta(0,x)$ и $(\partial\theta/\partial t)(0,x)$.

Впрочем, это нетрудно видеть и не пользуясь калибровочным преобразованием. Действительно, поскольку

$$\mathrm{rot}\,\psi(0,x) = u_2(0,x) = g_2(x), \quad \mathrm{div}\psi(0,x) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,x),$$

то, как нетрудно проверить,

$$\psi(0,x) = -\omega(e) * g_2 - e * s_1, \tag{24}$$

где обозначено $s_1(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,x)$.

Кроме того,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(0,x) = -\alpha(u_1(0,x) + \alpha \mathrm{grad}\,\varphi(0,x)) = -\alpha(g_1(x) + \alpha \mathrm{grad}\,\varphi(0,x)). \tag{25}$$

Таким образом, если в начальный момент времени $t = 0$ известны значения $\varphi(0,x) = s_0(x)$ и $(\partial\varphi/\partial t)(0,x) = s_1(x)$, то известны, в силу (24), (25), и начальные значения $\psi(0,x)$ и $(\partial\psi/\partial t)(0,x)$ векторного потенциала ψ. Поэтому функции $\varphi(t,x)$ и $\psi(t,x)$ полностью определены.

Произвол в выборе φ и ψ устраняется лишь в рамках кулоновской калибровки.

Поскольку в представлении (21), в силу (22), $\operatorname{div}\psi \neq 0$ то, вновь применяя разложение Гельмгольца, положим

$$\psi = \psi^0 + \psi^1, \quad \operatorname{div}\psi^0 = 0, \quad \operatorname{rot}\,\psi^1 = 0,$$

и аналогично для заданного векторного поля f:

$$f = f^0 + f^1, \quad \operatorname{div} f^0 = 0, \quad \operatorname{rot} f^1 = 0.$$

Тогда в представлении (21)

$$u_1 = v + w, \quad u_2 = \operatorname{rot}\psi^0, \tag{26}$$

где

$$v = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi^0}{\partial t}, \quad w = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi^1}{\partial t} - \alpha \operatorname{grad}\varphi. \tag{27}$$

Подстановка (27), (28) в (19) приводит к уравнениям

$$\partial^2\psi^0/\partial t^2 - \alpha^2\Delta\psi^0 = \alpha f^0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -f^1, \quad \operatorname{div} w = \rho. \tag{28}$$

Поскольку $\operatorname{rot} w = 0$, то имеем

$$w = e * \rho. \tag{29}$$

При этом уравнение $\frac{\partial w}{\partial t} + f^1 = 0$ выполняется тождественно, так как $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div} f = 0$.

В результате представление (21) принимает вид

$$u_1 = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi^0}{\partial t} + e * \rho, \quad u_2 = \operatorname{rot}\psi^0, \tag{30}$$

где ψ^0 есть решение волнового уравнения (28). Начальные условия для ψ однозначно определены начальными условиями для электромагнитного поля.

Действительно, $\operatorname{rot}\psi^0(0,x) = g_2(x)$, $\operatorname{div}\psi^0(0,x) = 0$, поэтому

$$\psi^0(0,x) = -\omega(e) * g_2. \tag{31}$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial \psi^0}{\partial t}(0, x) = -\alpha(g_1(x) - (e * g_1)(x)). \tag{32}$$

В частности, решение $\psi^0(t, x)$ удовлетворяет условию $\operatorname{div} \psi^0(t, x) = 0$ при всех $t \geq 0$.

Заметим теперь, что, положив $w = -\alpha \operatorname{grad} \varphi^0$, имеем

$$u_1 = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \psi^0}{\partial t} - \alpha \operatorname{grad} \varphi_0, \quad u_2 = \operatorname{rot} \psi^0, \tag{33}$$

причем $\operatorname{div} \psi^0 = 0$, что совпадает с кулоновской калибровкой.

Поскольку в рамках этой калибровки ψ^0 и φ^0 определяются совершенно однозначно, то остальные формулы, полученные в заметке, можно получить и с помощью потенциалов. Следует лишь принять во внимание формулы (32), (33), связывающие начальные данные для функции ψ^0 с начальными данными для электромагнитного поля.

Как следствие нет необходимости в отыскании вектор-функции ψ^1 и скалярной функции φ, фигурирующих в (28), поскольку эта комбинация совпадает с правой частью (30). Этот факт иногда называют "компенсацией продольных и временных фотонов".

Резюмируя, можно утверждать, что задача Коши (19), (20) и задача отыскания потенциалов φ и ψ, связанных условием кулоновской калибровки, равносильны. В частности, формулы (4) и (18) могут быть получены с помощью потенциалов φ и ψ, удовлетворяющих условию кулоновской калибровки. Однако в литературе, насколько известно автору, в явном виде эти формулы отсутствуют.

Что касается случая лоренцевской калибровки, то он, в существенном, сводится к случаю кулоновской калибровки, отличаясь от последнего наличием дополнительных слагаемых, вызванных неоднозначностью определения потенциалов, причем эти дополнительные слагаемые компенсируют друг друга, как уже отмечено выше.

4. Заметим еще, что в приложениях часто используется и представление электромагнитного поля через так называемые потенциалы Герца φ_e и φ_m (вместо φ используют букву П) [2]. Они связаны с потенциалами φ и ψ соотношениями

$$\varphi = -\operatorname{div} \varphi_e, \quad \psi = \partial \varphi_e / \partial t + \operatorname{rot} \varphi_m, \tag{34}$$

так что условия калибровки Лоренца для них выполнены. Дополняя (34) условиями $\operatorname{rot} \varphi_e = 0$, $\operatorname{div} \varphi_m = 0$, приходим к заключению, что φ_e и φ_m однозначно выражаются через φ и ψ и поэтому имеют те же свойства, что и последние. В силу предыдущих рассуждений здесь также более уместна кулоновская калибровка, когда в правой части второго из уравнений (34) целесообразно опустить первое слагаемое.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю признательность А. Н. Ораевскому и А. П. Солдатову за ценные обсуждения содержания заметки.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 2. Теория поля. Издание шестое, исправленное и дополненное. М., Наука, 1973.

[2] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., Наука, 1973 (M. Born, E.Wolf. Principles of Optics, Fourth Edition, Pergamon Press, 1968).

[3] Cohen-Tannoudji C., Dupount-Roc J., Grynberg G. Photons & Atoms. Introduction to Quantum Electodynamics. A Wiley-Interscience Publications, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997.

[4] Schwinger J. A Magnetic Model of Matter, Science, **165**, N 3895, 757 (1969).

[5] Baker B. B., Copson E. T. The Mathematical Theory of Huygens' Principles. 2nd ed. Oxford: Oxford Univ. Press, 1950.

[6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 4. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория. Часть 1. М., Наука, 1968.

[7] Монополь Дирака. Сборник статей. Перевод с английского под ред. Б.М. Болотовского и Ю.Д. Усачева. М., Мир, 1970.

[8] Страшев А. Н., Томильчик Л. М. Электродинамика с магнитным зарядом. Минск, 1975.

Поступила в редакцию 20 июня 2003 г.