Краткие сообщения по физике № 1 1980

ФУНКЦИЯ ГРИНА КВАЗИКВАДРАТИЧНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

В. В. Додонов, Е. В. Курмышев, В. И. Манько

УДК 530.145

В работе рассмотрена структура и предложен метод построения функции Грина квазиквадратичных квантовых систем.

В настоящей работе рассмотрена структура и предложен метод построения функции Грина (ФГ) одного класса квантовых систем. Эти системы мы будем называть квазиквадратичными – смысл названия прояснится из дальнейшего. В качестве примера, иллюстрирующего предложенный метод, мы рассмотрим систему с кубическим гамильтонианом, ФГ которой можно вычислить в конечном виде. Здесь же мы в явном виде построим ФГ квантовой системы, гамильтониан которой не является квазиквадратичным.

Назовем квазиквадратичными такие системы, гамильтониан которых имеет следующий вид:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{\vec{q}}\hat{B}(\hat{\vec{y}},t)\hat{\vec{q}} + \hat{\vec{C}}(\hat{\vec{y}},t)\hat{\vec{q}} + \hat{\Phi}(\hat{\vec{y}},t);$$

$$\hat{\vec{q}} = \begin{pmatrix} \hat{\vec{p}}_x \\ \hat{\vec{x}} \end{pmatrix}; \quad \hat{\vec{C}} = \begin{pmatrix} \hat{\vec{c}}_1 \\ \hat{\vec{c}}_2 \end{pmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{Vmatrix} \hat{b}_1 & \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 & \hat{b}_4 \end{Vmatrix}; \quad \hat{\vec{y}} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_K \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где N-мерные векторы-операторы $\hat{\vec{p}}_x$ и $\hat{\vec{x}}$ есть канонически сопряженные обобщенные переменные с коммутационными соотношениями $[\hat{x}_i,\hat{p}_{xj}] = i\hbar\delta_{ij}$ $(i,j = 1,\ldots,N)$, а компоненты N-мерных векторов $\hat{\vec{c}}_1$ и $\hat{\vec{c}}_2$ и элементы N-мерных матриц $\hat{b}_m$ $(m = 1,2,3,4)$ и скаляр $\hat{\Phi}(\hat{\vec{y}},t)$ могут быть произвольными функциями времени и эрмитового вектор-оператора $\hat{\vec{y}}$, причем $[\hat{y}_s,\hat{p}_{xj}] = [\hat{y}_s,\hat{x}_j] = 0$, $[y_s,y_l] = 0$ $(s,l = 1,\ldots,K)$ ("крышечкой" обозначаются операторы). Пусть оператор $\hat{\vec{y}}$ имеет полную ортонормированную систему собственных состояний $\{|\varphi_{n_s}\rangle: \hat{y}_s|\varphi_{n_s}\rangle = y_{n_s}|\varphi_{n_s}\rangle$, $s = 1,\ldots,K;$

$n_s = \ldots \}$. Для простоты спектр операторов $\hat{\bar{y}}_s$ считаем дискретным. Полную систему решений уравнения Шредингера (УШ) с гамильтонианом (I) можно представить в форме произведения собственных функций операторов $\hat{y}_s$ и решений УШ с гамильтонианом

$$\hat{H}_{\bar{n}} = \frac{1}{2}\,\hat{\bar{q}}B(\bar{y}_{\bar{n}},t)\hat{\bar{q}} + \bar{C}(\bar{y}_{\bar{n}},t)\hat{\bar{q}} + \Phi(\bar{y}_{\bar{n}},t), \qquad (\mathrm{Ia})$$

где собственное значение $\bar{y}_{\bar{n}} = (y_{n_1},\ldots,y_{n_K})$, $\bar{n} = (n_1,\ldots,n_K)$, оператора $\hat{\bar{y}}$ следует рассматривать как параметр. Следовательно, можно записать ФГ рассматриваемого класса систем (I) в следующем виде

$$G(2,\bar{z},t;1,\bar{z}_o,0) = \sum_{\bar{n}} \varphi_{\bar{n}}(\bar{z})\varphi^*_{\bar{n}}(\bar{z}_o)G(2,t;1,0\|\bar{y}_{\bar{n}}), \qquad (2)$$

где $\varphi_{\bar{n}}(\bar{z})$ есть собственная функция оператора $\hat{\bar{y}}$, соответствующая собственному значению $\bar{y}_{\bar{n}}$, в некотором $\bar{z} = (z_1,\ldots,z_K)$-представлении, а ФГ $G(2,t;1,0\|\bar{y}_{\bar{n}})$ есть амплитуда перехода системы (Iа) из состояния $|1,0\|\bar{y}_{\bar{n}}\rangle$ в момент времени $t_o = 0$ в состояние $|2,t\|\bar{y}_{\bar{n}}\rangle$ в момент времени t (при фиксированном значении параметра $\bar{y}_{\bar{n}}$). Эта форма записи полезна при вычислении ФГ квазиквадратичных систем, поскольку задача сведена к построению функции $G(2,t;1,0\|\bar{y}_{\bar{n}})$, которая методом интегралов движения получена в явном виде в различных представлениях в работе /I/, где рассмотрены общеквадратичные системы. Отметим, что в работах /I – 4/ по указанной схеме строилась ФГ релятивистской заряженной частицы, движущейся в электромагнитных полях.

Рассмотрим пример. Пусть дан стационарный гамильтониан

$$\hat{H} = \omega(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2})\hat{p}_y/p_*; \quad m = \hbar = 1, \qquad (3)$$

где ω – постоянная частота, p_* – обезразмеривающая постоянная, $\hat{a} = (\omega\hat{x} + i\hat{p}_x)/\sqrt{2\omega}$; $\hat{a}^+ = (\omega\hat{x} - i\hat{p}_x)/\sqrt{2\omega}$; $[\hat{a},\hat{a}^+] = 1$. Полная ортонормированная система собственных функций соответствующего УШ в смешанном когерентно-координатном представлении имеет вид

$$\Psi_{n,p_y}(\alpha^*,y,t) = (\alpha^*)^n(2\pi n!)^{-1/2}\times$$

$$\times\exp\left[-|\alpha|^2/2 + ip_y y - \omega t(n + \frac{1}{2})\,p_y/p_*\right],$$

причем когерентное состояние $|\alpha\rangle$ удовлетворяет уравнению $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. Используя формулу (2), получаем ФГ системы (3) в смешанном представлении в виде ряда по δ-функциям Дирака

$$G(\alpha^*,y,t;\beta,y',0) = \exp(-(|\alpha|^2+|\beta|^2)/2)\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha^*\beta)^n}{n!}\,\delta\left[-(\omega t/p_*)(n+1/2)+(y-y')\right]. \qquad (4)$$

В координатном представлении ФГ имеет следующий вид:

$$G(x,y,t;x',y',0) = \sqrt{\omega}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x\sqrt{\omega})u_n(x'\sqrt{\omega})\delta\left[-(\omega t/p_*)(n+1/2)+\right.$$

$$\left.+(y-y')\right],$$

где $u_n(x) = (\sqrt{\pi}\,2^n n!)^{-1/2}\exp(-x^2/2)H_n(x)$ есть ортонормированное собственное состояние гармонического осциллятора. Используя интегральное представление δ-функции и меняя порядок интегрирования и суммирования в (4), мы можем записать ФГ системы (I) в аналитической форме, отличной от выражения (4):

$$G(\alpha^*,y,t;\beta,y',0) = (-i/2\pi\omega t)p_*\exp(-(|\alpha|^2+|\beta|^2)/2)\times$$

$$\times\,\Gamma\left[1/2-(y-y')p_*/\omega t\right](-\alpha^*\beta)^{-1/2+(y-y')p_*/\omega t}; \qquad (4a)$$

$$-\pi < \operatorname{Arg}(-\alpha^*\beta) < \pi; \quad -\pi/2 < \operatorname{Arg}(-\alpha^*),\ \operatorname{Arg}\beta < \pi/2.$$

Следует отметить, что функция (4a) допускает к рассмотрению только переходы из одной полуплоскости фазовой плоскости (x,p_x) в другую полуплоскость.

В работе /5/ в качестве примера была рассмотрена одномерная частица с линейным трением $\ddot{x}+\gamma\dot{x}=0$, где $\gamma = \mathrm{const}$, с гамильтонианом $H_2 = E_0\exp(p_x/p_*) + 2\gamma p_* x$; E_0, p_* – постоянные. В этой работе для квантовой системы с гамильтонианом $\hat{H}_2$ было приведено координатное представление ФГ в интегральной форме

$$G(x_2,t_2;x_1,t_1) = (2\pi\hbar)^{-1}\exp(-(i/\hbar)2\gamma t p_* x_1)\int_{-\infty}^{\infty} dp\,\exp\left[(i/\hbar)(x_2-\right.$$

$$\left.-x_1)p - iE_0(2\hbar\gamma)^{-1}(\exp(2\gamma t)-1)\exp(p/p_*)\right].$$

Эту функцию можно вычислить явно и она имеет следующий вид:

$$G(x_2,t_2;x_1,t_1) = (2\pi\hbar)^{-1}p_*\exp\left[-(i/\hbar)2\gamma t p_* x_1\right]\times$$

$$\times\,\Gamma((i/\hbar)(x_2-x_1)p_*)\left[(iE_0/2\gamma\hbar)(\exp(2\gamma t)-1)\right]^{-(i/\hbar)(x_2-x_1)p_*}. \qquad (5)$$

Используя асимптотическое разложение Г-функции, из (5) получаем квазиклассическое выражение для ФГ при $\hbar \to 0$

$$G(x_2,t_2;x_1,t_1) \xrightarrow[\hbar \to 0]{} \left(\frac{p_*}{2\pi i\hbar \Delta x}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}2\gamma t p_* x_1\right)\times$$

$$\times \exp\left\{\frac{ip_*\Delta x}{\hbar}\ln\left[\frac{2\gamma p_*\Delta x}{eE_0(\exp(2\gamma t)-1)}\right]\right\}; \quad \Delta x = x_2 - x_1 > 0,$$

$$G(x_2,t_2;x_1,t_1) \xrightarrow[\hbar \to 0]{} \left(\frac{ip_*}{2\pi\hbar|\Delta x|}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}2\gamma t p_* x_1\right)\times \tag{6}$$

$$\times \exp\left\{\frac{ip_*\Delta x}{\hbar}\ln\left[\frac{2\gamma p_*|\Delta x|}{eE_0(\exp(2\gamma t)-1)}\right]+\frac{\pi p_*\Delta x}{\hbar}\right\}; \quad \Delta x = x_2 - x_1 < 0.$$

Отметим, чтс формулы (6) совпадают с квазиклассической ФГ, полученной в работе /5/ методом перевала из интегральной формы, с точностью до небольшой описки в /5/.

Более подробное изложение рассмотренных вопросов дано в работе /6/.

Поступила в редакцию
7 сентября 1979 г.

Литература

1. И. А. Малкин, В. И. Манько, Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем, "Наука", М., 1978 г.
2. В. А. Фок, Изв. АН СССР, сер. физ., № 4-5, 551 (1937).
3. R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys., 20, 367 (1948).
4. В. В. Додонов, И. А. Малкин, В. И. Манько, Physica, 82 A, 113 (1976).
5. В. В. Додонов, В. И. Манько, В. Д. Скаржинский, Препринт ФИАН № 216, 1978 г.
6. В. В. Додонов, Е. В. Курмышев, В. И. Манько, Препринт ФИАН № 187, 1979 г.