Краткие сообщения по физике № 1 1980

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

И. Д. Маш

УДК 533.92

Получен общий вид функции распределения быстрых электронов в полностью ионизованной плазме и найдено решение, удовлетворяющее граничным условиям. Решение представлено в форме, позволяющей получить средние характеристики физических величин с любой точностью с помощью простых алгебраических вычислений.

Уравнение для функции распределения быстрых электронов в полностью ионизованной плазме может быть получено из уравнения Л. Д. Ландау /I/ и представлено в виде [ж)]

$$\mu \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial E} + \frac{\alpha}{E} \hat{l}^2 f, \qquad (I)$$

где f – функция распределения, $E = \beta v^4$, $\beta = \frac{m_e^2}{8\pi e^4 \alpha n z}$

α – кулоновский логарифм, ez – заряд иона, n – плотность электронов плазмы, μ – косинус угла между направлением движения и первоначальным направлением движения, $\alpha = (1 + z)/8$,

$$\hat{l}^2 f = \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right].$$

Нами получено общее решение уравнения (I) в виде:

$$f = \sum_{n,i} A_n^i(x) E^{\alpha_n + i} \varphi_{n,i}(\mu), \qquad (2)$$

ж) Здесь не учитывается электрическое поле, связанное с разделением заряда, что при больших потоках электронов может быть существенно для лазерных термоядерных мишеней.

где $A_n^i(x)$ – i-тая производная произвольной функции, α_n и $\varphi_{n,i}(\mu)$ определяются из следующих рекурентных соотношений:

$$\alpha\hat{I}^2\varphi_{n,0}(\mu) = -\alpha_n\varphi_{n,0}(\mu), \quad \alpha_n = \alpha n(n+1),$$
$$\mu\varphi_{n,i-1} = (\alpha_n + i + \alpha\hat{I}^2)\varphi_{n,i}. \tag{3}$$

Из соотношений (3) следует:

$$\varphi_{n,i}(\mu) = (\alpha_n + i + \alpha\hat{I}^2)^{-1}\mu\varphi_{n,i-1}. \tag{4}$$

Легко видеть, что $\varphi_{n,i}(\mu)$ являются полиномами степени $n + i$. Приведем несколько первых функций:

$$\varphi_{0,0} = 1, \quad \varphi_{1,0} = \mu, \quad \varphi_{2,0} = \mu^2 - 1/3,$$
$$\varphi_{0,1} = \frac{\mu}{1-2\alpha}, \quad \varphi_{0,2} = \frac{\mu^2 - 1/3}{(1-2\alpha)(2-6\alpha)} + \frac{1}{6(1-2\alpha)}, \tag{5}$$
$$\varphi_{1,1} = \frac{\mu^2 - 1/3}{1-4\alpha} + \frac{1}{3(1+2\alpha)}, \quad \varphi_{1,2} = \frac{\mu^3 - (3/5)\mu}{(1-4\alpha)(2-10\alpha)} +$$
$$+ \frac{\mu(3-4\alpha)}{10(1-4\alpha)(1+2\alpha)}.$$

Функцию распределения легко построить, если $A_n(x)$ выбрать в виде полиномов. Легко видеть, что тогда ряд обрывается и собственные функции уравнения (I) будут представлены в виде полиномов по x, μ. Приведем несколько первых функций:

$$f_0 = \varphi_{n,0}E^{\alpha_n}, \quad f_1 = x + \frac{\mu E}{1-2\alpha},$$
$$f_2 = \mu x E^{2\alpha} + E^{2\alpha+1}\left(\frac{\mu^2 - 1/3}{1-4\alpha} + \frac{1}{3(1+2\alpha)}\right). \tag{6}$$

Определим функцию распределения f, задав граничное условие $f = \psi(x)\Phi(\mu)$ при $E = I$, где $\psi(x)$ и $\Phi(\mu)$ – произвольные функции. Легко видеть, что $A_n(x)$ можно выбрать в виде:

$$A_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{n,i}\psi^i(x). \tag{7}$$

Тогда для коэффициентов $c_{n,i}$ получаем систему уравнений

$$\sum_{n} \sum_{x=0}^{m} c_{n,k} \varphi_{n,m-k}(\mu) = \Phi(\mu) \delta_{m,0},$$

где $\delta_{m,0}$ - символ Кронекера. Легко видеть, что определение коэффициентов $c_{n,i}$ из данной системы уравнений не представляет никакого труда, поскольку $\varphi_{n,0}(\mu)$ ортогональны, а $\varphi_{n,i}(\mu)$ - известные функции.

Определим для примера коэффициенты $c_{n,i}$ для изотропного распределения ($\Phi(\mu) = 1$). Отличны от нуля следующие коэффициенты:

$$c_{0,0} = 1, \quad c_{1,1} = -\frac{1}{1 - 2\alpha}, \quad c_{0,2} = -\frac{2\alpha}{6(1 - 4\alpha^2)},$$
$$c_{2,2} = \frac{1}{(1 - 4\alpha)(2 - 6\alpha)}. \tag{8}$$

Таким образом, функция распределения f для приведенных выше граничных условий может быть представлена в виде:

$$f = \sum_{i,n}^{\infty} \sum_{k=0}^{i} \psi^{i}(x) c_{n,k} E^{\alpha_n + i - k} \varphi_{n,i-k}(\mu). \tag{9}$$

Полученное решение позволяет определить средние характеристики физических величин с любой точностью для произвольных граничных условий и любых значениях параметра α. В более ранней работе /2/ аналитическое решение было получено в линейном приближении по μ для целых значений параметра α.

Поступила в редакцию
4 октября 1979 г.

Литература

1. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 7, 203 (1937).
2. Е. Г. Гамалий, И. Д. Маш, В. Б. Розанов, Краткие сообщения по физике ФИАН № 3, 23 (1979).