Краткие сообщения по физике № 1 1980

ПРИНЦИП АДДИТИВНОСТИ И ОГРАНИЧЕНИЕ ПРОИЗВОЛА В ВЫБОРЕ ЛАГРАНЖИАНА ДЛЯ ЗАДАННЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

В. В. Додонов, В. И. Манько, В. Д. Скаржинский

УДК 530.I45

Показано, что принцип аддитивности существенно ограничивает произвол в выборе лагранжиана для заданных классических уравнений движения.

Хорошо известно, что процедура восстановления лагранжиана по заданным классическим уравнениям движения является неоднозначной [*]. В классической механике, где вся информация о физической системе содержится в уравнениях движения, а вариационное описание с помощью лагранжевского аппарата есть вопрос удобства или традиции, эта неоднозначность несущественна. Более того, ее можно использовать для обобщения вариационной формулировки ряда физических задач и при изучении скрытой симметрии уравнений движения /2,4/. Однако при квантовании данной классической системы понятия лагранжиана, гамильтониана действия играют определяющую роль и различный их выбор приводит к разным квантовым системам, т.е. к разным наблюдаемым следствиям /2,5/. Именно квантование наделяет физическим смыслом эти величины.

В этой связи возникает вопрос о критериях выбора одного, "правильного", лагранжиана из всех возможных лагранжианов для данной классической системы. Здесь мы покажем, что принцип аддитивности, там, где он применим, может служить таким критерием [**].

---

[*] См., например, обзорные статьи /I,2/, а также монографию /3/. В работе /2/ приводится обширная библиография по этому вопросу.

[**] Отметим, что критерий аддитивности неоднократно затрагивался в литературе (см., например, /6/).

Рассмотрим простой пример – две частицы с массами m_1 и m_2, взаимодействующие между собой с силой $f(t,x_1-x_2,\dot{x}_1-\dot{x}_2)$:

$$\ddot{x}_i = f_i(t,x_1-x_2,\dot{x}_1-\dot{x}_2);\ i = 1,2;\ f_{1,2} = \pm \frac{1}{m_{1,2}} f(t,x_1-x_2,\dot{x}_1-\dot{x}_2). \tag{I}$$

Системе (I) соответствует некоторый класс лагранжианов $L\{f\}$, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial \dot{x}_i}\dot{x}_j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_i} f_j(t,x_1-x_2,\dot{x}_1-\dot{x}_2) = 0. \tag{2}$$

Свойство аддитивности означает, что при выключении взаимодействия между частицами лагранжиан системы распадается на сумму лагранжианов свободного движения этих частиц

$$L\{f=0\} = L_1(t,x_1,\dot{x}_1) + L_2(t,x_2,\dot{x}_2). \tag{3}$$

Принцип аддитивности будет служить критерием отбора, если окажется, что лагранжианы L_1 и L_2 не являются произвольными представителями класса лагранжианов для свободного движения каждой из частиц. Докажем, что это действительно так.

С этой целью найдем общее решение уравнений (2). В переменных $x = x_1 - x_2$, $y = (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1 + m_2)$ уравнения (I) и (2) приводятся к виду

$$\begin{cases} m\ddot{x} = f(t,x,\dot{x}) \\ \ddot{y} = 0 \end{cases} \qquad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}} - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\dot{x} - \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \dot{x}}\dot{y} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\frac{1}{m} f(t,x,\dot{x}) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{y}} - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{y}}\dot{x} - \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \dot{y}}\dot{y} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}}\frac{1}{m} f(t,x,\dot{x}) = 0. \tag{5}$$

Дифференцируя уравнения (5) по $\dot{x}$ и $\dot{y}$ и вводя обозначения

$$\mu = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}, \quad \sigma = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}}, \quad \nu = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}^2},$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mu}{\partial t} + \dfrac{\partial\mu}{\partial x}\dot{x} + \dfrac{\partial\mu}{\partial y}\dot{y} + \dfrac{\partial\mu}{\partial\dot{x}}\dfrac{1}{m}f(t,x,\dot{x}) + \mu\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial f}{\partial\dot{x}} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial\sigma}{\partial t} + \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\dot{x} + \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}\dot{y} + \dfrac{\partial\sigma}{\partial\dot{x}}\dfrac{1}{m}f(t,x,\dot{x}) + \dfrac{1}{2}\sigma\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial f}{\partial\dot{x}} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial\nu}{\partial t} + \dfrac{\partial\nu}{\partial x}\dot{x} + \dfrac{\partial\nu}{\partial y}\dot{y} + \dfrac{\partial\nu}{\partial\dot{x}}\dfrac{1}{m}f(t,x,\dot{x}) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial\dot{y}} - \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial\dot{x}} + \frac{1}{2}\sigma\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial\dot{x}} = 0. \tag{7}$$

Дифференцируя уравнения (5) по y и x и используя уравнения (7) и (6), получим

$$\sigma\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\dot{x}} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial\dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial^2 f}{\partial\dot{x}^2}\frac{1}{m}f - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\right)^2 - 2\frac{\partial f}{\partial x}\right| = 0. \tag{8}$$

Так как второй сомножитель, вообще говоря, отличен от нуля, то

$$\sigma \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}\partial\dot{y}} = 0. \tag{9}$$

Отсюда

$$L(t,x,y,\dot{x},\dot{y}) = A(t,x,y,\dot{x}) + B(t,x,y,\dot{y}).$$

Из уравнений (7) и (9) следует, что

$$A(t,x,y,\dot{x}) = a_1(t,x,\dot{x}) + \dot{x}b_1(t,x,y) + c_1(t,x,y),$$

$$B(t,x,y,\dot{y}) = a_2(t,y,\dot{y}) + \dot{y}b_2(t,x,y) + c_2(t,x,y),$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial y} = \frac{\partial b_2}{\partial x}, \text{ т.е. } b_1 = \frac{\partial U(t,x,y)}{\partial x}, \quad b_2 = \frac{\partial U(t,x,y)}{\partial y}.$$

Тогда, отбрасывая полную производную $\frac{dU}{dt}$, имеем

$$L(t,x,y,\dot{x},\dot{y}) = a_1(t,x,\dot{x}) + a_2(t,y,\dot{y}) + c(t,x,y).$$

Подставляя это выражение в уравнения (5), получаем

$$c(t,x,y) = \tilde{c}_1(t,x) + \tilde{c}_2(t,y)$$

и, окончательно,

$$L(t,x,y,\dot{x},\dot{y}) = L_1(t,x,\dot{x}) + L_2(t,y,\dot{y}), \tag{10}$$

где L_1 и L_2 удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_1}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 L_1}{\partial t \partial \dot{x}} - \dfrac{\partial^2 L_1}{\partial x \partial \dot{x}} \dot{x} - \dfrac{\partial^2 L_1}{\partial \dot{x}^2} \dfrac{1}{m} f(t,x,\dot{x}) = 0, \\ \dfrac{\partial L_2}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 L_2}{\partial t \partial \dot{y}} - \dfrac{\partial^2 L_2}{\partial y \partial \dot{y}} \dot{y} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Таким образом, произвольный лагранжиан для уравнений (1) или (4) представляет собой сумму произвольного лагранжиана относительного движения $L_1\{f\}$, и произвольного лагранжиана свободного движения центра масс L_2.

При выключении взаимодействия, $f(t,x,\dot{x}) \to 0$, уравнения (1) переходят в уравнения свободного движения, а лагранжиан (10) – в сумму произвольных лагранжианов свободного движения в переменных x и y

$$L\{f=0\} = L_1(t,x,\dot{x}) + L_2(t,y,\dot{y}). \tag{12}$$

Заметим, что лагранжианы типа (12) принадлежат к классу лагранжианов для системы (1) с $f = 0$, но не исчерпывают его, так как в случае $f = 0$ отсутствуют ограничения (8) и (9).

Принцип аддитивности (3) требует, чтобы выполнялось равенство

$$L_1(t,x_1-x_2,\dot{x}_1-\dot{x}_2) + L_2\left(t,\ \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\ \frac{m_1\dot{x}_1+m_2\dot{x}_2}{m_1+m_2}\right) = \tilde{L}_1(t,x_1,\dot{x}_1) + \tilde{L}_2(t,x_2,\dot{x}_2). \tag{13}$$

Из класса лагранжианов для свободного движения лишь квадратичные по скоростям лагранжианы

$$L_i = cm_i\dot{x}_i^2, \quad i = 1,2$$

удовлетворяют этому функциональному соотношению.

Тем самым мы показали на конкретном примере, что принцип аддитивности практически устраняет произвол в выборе лагранжианов для свободного движения и фиксирует предельную форму лагранжиана для взаимодействующих частиц. Полученный результат нетрудно обобщить на случай движения со взаимодействием.

Данное рассмотрение неприменимо в тех случаях, когда взаимодействие по тем или иным причинам нельзя выключить.

Поступила в редакцию
19 октября 1979 г.

Литература

1. P. Havas, Nuovo Cimento (Suppl.) 5, 363 (1957).
2. V. V. Dodonov, V. I. Man'ko, V. D. Skarzhinsky, P. N. Lebedev Institute of Physics, Preprint No 216 (1978).
3. R. M. Santilli, The Inverse Problem in Newtonian Mechanics, Springer-Verlag, 1979.
4. В. Д. Скаржинский, Препринты ФИАН №.93, № 177, 1969 г.
5. В. В. Додонов, В. И. Манько, В. Д. Скаржинский, Краткие сообщения по физике ФИАН № 5, 27 (1978).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, "Наука", 1973 г., стр. 12.