Краткие сообщения по физике № 4 1980

ВЫБОР ЧИСЛА "КРУПНЫХ" ЧАСТИЦ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СИЛЬНОТОЧНЫХ ПУЧКОВ

П. Н. Остроумов, А. П. Фатеев

УДК 621.384.6

Получены аналитические соотношения, позволяющие выбрать число "крупных" частиц, необходимое для расчета динамики сильноточных пучков с нужной точностью.

Для исследования динамики сильноточных пучков широко используется метод "крупных" частиц /1/. Достоинством этого метода является возможность получения информации не только о размерах пучка, но и о распределении частиц внутри сгустков. В последнее время появились работы /2-4/, в которых метод "крупных" частиц применяется для исследования 3-мерного движения. Сложность численного моделирования (особенно 3-мерного движения) связана с необходимостью выбора параметров модели, которые обеспечивали бы нужную точность расчета. К ним относятся, в частности, число и размер "крупных" частиц. К сожалению, критерия выбора этих параметров, пригодного для широкого класса задач, не существует. Известны лишь численные эксперименты по определению размеров частиц /5/.

Расчеты показывают, что наиболее чувствительным к параметрам модели является эмиттанс пучка. Огибающая пучка (точнее: его среднеквадратический размер) слабо зависит от параметров модели в широком диапазоне их изменения. Исходя из этого, нами предлагается в качестве критерия выбора параметров модели использовать точность вычисления эмиттанса. Если эмиттанс вычисляется с удовлетворительной точностью, точность вычисления других характеристик пучка заведомо лучше.

В настоящей работе приведены оценки влияния числа "крупных" частиц на величину эмиттанса пучка. Получены аналитические соотношения для числа "крупных" частиц, обеспечивающего заданную точность вычисления эмиттанса. Полученные соотношения, на наш взгляд, представляют практический интерес, поскольку они позволяют миновать трудоемкий этап выбора одного из важных параметров модели.

В ускорителях и формирующих устройствах обычно имеют дело с квазипериодической последовательностью заряженных сгустков, движущихся со скоростью $\vec{v}$. Поведение частиц в таких сгустках описывается самосогласованным уравнением Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\,\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{m}\,(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}])\,\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0, \qquad (I)$$

для численного решения которого используется метод " крупных" частиц.

Укрупнение частиц происходит по заряду и массе: каждой "крупной" частице приписывается заряд $q = \nu e$ и масса $m_q = \nu m$, где $\nu = N/N_M$ - коэффициент "укрупнения", равный отношению реального числа частиц к числу частиц в машинной модели. При замене реальных сгустков "крупными" частицами величина и характер взаимодействия, вообще говоря, меняются. Чтобы уравнение Власова (I) было справедливо и для "крупных" частиц, эти изменения должны быть малыми. В частности, укрупнение не должно приводить к заметному увеличению кулоновского рассеяния. В противном случае модель (в отличие от реальной системы) не будет "бесстолкновительной".

Известно, что флуктуационные силы, возникающие при взаимодействии (например, рассеянии) частиц внутри сгустков, вызывают рост эмиттанса пучка. Если флуктуационные силы малы (рассеяние невелико), изменением эмиттанса можно пренебречь. Однако при укрупнении частиц сечение рассеяния увеличивается, и при малом числе "крупных" частиц (при большом коэффициенте укрупнения) эмиттанс модели может заметно отличаться от эмиттанса реального пучка.

Найдем связь между числом "крупных" частиц (точнее: между коэффициентом укрупнения) и изменением эмиттанса пучка. Для определенности рассмотрим поперечное движение. Предположим, что фазовая плотность частиц постоянна (частицы равномерно заполняют эмиттанс ε). В результате рассеяния некоторые частицы могут оказаться за пределами ε. Если углы рассеяния малы, то распределение частиц практически не меняется и увеличение эмиттанса

$\delta\varepsilon/\varepsilon \simeq \delta N/N$, где $\delta N/N$ – доля частиц, рассеянных за пределы ε. Будем считать эти частицы "потерянными". Тогда задача определения величины $\delta N/N$ сводится к решению уравнения для потерь частиц из-за однократного рассеяния [*)].

Нетрудно показать (см., например, /6/), что доля потерянных (в указанном выше смысле) частиц

$$\frac{\delta N}{N} = \int_0^\infty P(u)\left[\int_0^t S(u)e^{-\tau}dt\right]du, \qquad (2)$$

где $S(u)$ – вероятность того, что частица испытает за единицу времени рассеяние на "опасный" угол, то есть, что параметр $u = x'^2 + x^2$ изменится на величину $\Delta u > u_{max} - u$, $\tau = \int_0^t Q dt$, Q – вероятность рассеяния за единицу времени, $P(u)$ – функция распределения частиц по u. В нашем случае

$$P(u) = \begin{cases} 1/u_{max}, & \text{если } u \leqslant u_{max} \\ 0, & \text{если } u > u_{max}, \end{cases} \qquad (3)$$

где u_{max} определяется величиной эмиттанса ε.

Сечение кулоновского рассеяния зависит от вида потенциала взаимодействующих частиц. Для <u>точечных</u> заряженных частиц

$$Q \simeq 16\pi nv\left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \ln\frac{1}{\sin(\theta_{min}/2)}, \qquad (4)$$

где v – относительная скорость сталкивающихся частиц, n – плотность частиц. Учитывая, что радиус сильного взаимодействия $r_s = 2e^2/mv^2$ мал по сравнению с прицельным расстоянием ℓ_{max}, и считая $v \simeq \mathrm{const}$, найдем:

$$\tau \simeq 4\pi nvtr_s^2\ln(\ell_{max}/r_s), \qquad (5)$$

где t – время. В качестве ℓ_{max} выберем расстояние между частицами. Это позволит при укрупнении частиц считать взаимодействия парными. Согласно сделанному допущению $\ell_{max} \simeq n^{-1/3}$.

[*)] В тех случаях, когда частота столкновений велика (число столкновений на длине моделирования много больше единицы), необходимо учитывать процессы многократного рассеяния.

Выражение для $S(u)$ можно найти, воспользовавшись формулами работы /6/. После несложных вычислений получим

$$S(u) \simeq 2\pi n v r_s^2 \ln(\pi/\theta_{кр}). \qquad (6)$$

Зависимость S от "амплитуды" поперечных колебаний заключена в определении опасного угла $\theta_{кр}$. Если распределение частиц на фазовой плоскости равномерное, то

$$\theta_{кр} \simeq \theta_{min} + \frac{2}{\pi}(1 - u/u_{max}).$$

Подставив (3)-(6) в (2) и выполнив интегрирование, получим

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\ln\frac{\pi^2}{2} + 1}{2\ln\frac{\xi_{max}}{r_s}}(1 - e^{-\tau}) \simeq 16{,}3 n v r_s^2 t_M, \qquad (7)$$

где t_M - время машинного моделирования.

Пользуясь формулой (7), можно найти коэффициент укрупнения ν, соответствующий заданной точности вычисления эмиттанса. Действительно, поскольку $n \sim 1/\nu$, а $r_s \sim \nu$,

$$\nu = \frac{(\delta\varepsilon/\varepsilon)}{16{,}3 n v r_s^2 t_M}. \qquad (8)$$

В качестве примера рассмотрим цилиндрический сгусток протонов длиной 6 см и радиусом сечения I см с плотностью $n = 3{,}3\cdot10^8$ см$^{-3}$, движущийся в фокусирующем канале длиной 2,5 м. Если энергия протонов 750 кэВ, то время моделирования $t_M = 2\cdot10^{-7}$ с. Предположим, что поперечный нормализованный эмиттанс сгустка $\varepsilon_н = 0{,}3\pi$ см.мрад. Соответствующая среднеквадратическая скорость относительного движения $v \simeq 6\cdot10^6$ см/с. Подставляя эти значения в (8), находим $\nu \simeq 2{,}6\cdot10^6(\delta\varepsilon/\varepsilon)$. Следовательно, эмиттанс сгустка на выходе канала будет определен с точностью 10%, если $\nu \simeq 2{,}6\cdot10^5$. Другими словами, для моделирования сгустка требуется 24000 "крупных" частиц. В современных вычислительных машинах реализовать такое количество частиц практически невозможно.

Наиболее эффективным способом уменьшения количества "крупных" частиц является сглаживание кулоновского потенциала на близких расстояниях. Сглаживание потенциала достигается путем введения конечного размера "крупных" частиц. Аппроксимация "крупных" частиц равномерно заряженными <u>облаками</u> /I/ приводит к следующему приближенному выражению для силы взаимодействия:

$$\frac{dU}{dr} \simeq \begin{cases} (q^2/\varkappa^2 R_0^3)r, & \text{если } r < \varkappa R_0 \\ q^2/r^2 & \text{, если } r \geqslant \varkappa R_0, \end{cases} \tag{9}$$

где R_0 - радиус "крупной" частицы, $\varkappa = 1,4$. Если принять $R_0 \geqslant \xi_{max}$, то можно получить достаточно простые соотношения для Q и S:

$$Q_{обл} \simeq \frac{1}{3}\pi n v r_s^2, \tag{10}$$

$$S_{обл}(u) = \frac{\pi}{12} n v r_s^2 \left[3(1 - 4a^2\theta_{кр}^2)^{1/2} - (1 - 4a^2\theta_{кр}^2)^{3/2}\right], \tag{11}$$

где $a = \varkappa R_0/2r_s$. Подставив эти выражения в (3), получим формулу для определения параметра ν в случае <u>частиц-облаков</u>

$$\nu_{обл} \simeq \frac{(\delta\varepsilon/\varepsilon)}{0,46 n v r_s^2 t_M}. \tag{12}$$

Сравнивая с аналогичной формулой для точечных частиц, находим $\nu_{обл}/\nu_{точ} \simeq 35$. Это значит, что замена точечных частиц равномерно заряженными облаками с радиусом $R_0 \geqslant \xi_{max}$ позволяет уменьшить требуемое число "крупных" частиц в 35 раз. В приведенном нами примере это число составит ~ 700.

Таким образом, если плотность моделируемого пучка достаточно велика, "крупные" частицы необходимо представлять в виде облаков с распределенным зарядом. Точечная аппроксимация может привести к грубым ошибкам.

Поступила в редакцию
23 января 1980 г.

Литература

1. Вычислительные методы в физике плазмы. Сб. статей. пер. с англ., М., "Мир", 1974 г.
2. Б. И. Бондарев, В. С. Кабанов. Труды Радиотехн. ин-та АН СССР, № 16, 96 (1974).
3. G. W. Wheeler et al., Particle Accelerators, 9, 1 (1979).

4. П. Н. Остроумов, Г. В. Романов. В сб. "Вопросы атомной науки и техники", серия Техника физического эксперимента, вып. I(3), I979 г., с. 32.
5. В. Б. Бавин. В сб. "Инженерно-математические методы в физике и кибернетике", вып. 7, М., Атомиздат, I978 г., с.3.
6. J. M. Greenberg, T. H. Berlin, Rev. Sci. Instr., 22, 293(1951).