Краткие сообщения по физике № 6 1980

ФУНКЦИЯ ГРИНА СИСТЕМЫ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ПЕРЕНОСЕ МЕЖЪЯДЕРНОГО КАСКАДА В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

С. В. Сережников

УДК 539.I2.523.34

Функция распределения плотности потока частиц от точечного мононаправленного источника представлена в виде функционала от функции распределения в случае плоского источника.

Наиболее детальную информацию о распространении межъядерного каскада в однородной среде дает дифференциальное пространственно-энергетическое и угловое распределение плотности потока частиц от точечного мононаправленного и моноэнергетического источника, т.е. функция Грина G^P для точечного источника в однородной среде. Один из подходов к решению задачи об определении функции G^P для случая распространения гамма-квантов был намечен У.Фано и др., /I/. Суть его заключается в том, чтобы представить искомое решение в виде функционала от функции Грина G^s для безграничного плоского источника, поскольку задача об определении G^s исследована гораздо полнее [ж)]. В данной работе подход У. Фано обобщается на случай распространения межъядерного каскада.

Функция Грина G^P для данной задачи представляет собой M-компонентный вектор (M – число сортов частиц, участвующих в каскаде), каждая компонента которого $G^P(j,\vec{r},E,\vec{\Omega};j_0,\vec{r}_0,E_0,\vec{\Omega}_0)$ есть функция распределения (по энергии E и по направлению движения $\vec{\Omega}$)

[ж)] Д. Мейер и А. Джекобс /2/ получили ряд дополнительных конкретных результатов, применяя этот подход к решению односкоростной задачи переноса нейтронов в плоской геометрии, полученному Кейзом /3/ (см. также /4/).

плотности потока частиц сорта j в точке $\bar{r}$ от точечного мононаправленного (в направлении $\bar{\Omega}_0$) и моноэнергетического (с энергией E_0) источника частиц сорта j_0, расположенного в точке $\bar{r}_0$ (в дальнейшем будем считать эту точку началом координат). Система кинетических уравнений, определяющая G^p, имеет вид

$$\left[\bar{\Omega}\bar{\nabla} + \Sigma^j_{tot}(E) + \lambda^j(E) - \frac{\partial}{\partial E}\beta^j(E)\right]G^p(j,\bar{r},E,\bar{\Omega};j_0,E_0,\bar{\Omega}_0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{M}\int\limits_{4\pi} d\bar{\Omega}'\int\limits_{E}^{E_0} dE'\left[\Sigma^i_{tot}(E')K_{ij}\begin{pmatrix}E'\to E\\ \bar{\Omega}'\to\bar{\Omega}\end{pmatrix} + \lambda^i(E')N_{ij}\begin{pmatrix}E'\to E\\ \bar{\Omega}'\to\bar{\Omega}\end{pmatrix}\right]\times \qquad (I)$$

$$\times G^p(i,\bar{r},E',\bar{\Omega}';j_0,E_0,\bar{\Omega}_0) + \delta_{jj_0}\delta(\bar{r})\delta(E-E_0)\delta(\bar{\Omega}-\bar{\Omega}_0),$$

$$j = 1,2,\ldots,M.$$

Здесь $\Sigma^j_{tot}(E)$ – полное макроскопическое сечение взаимодействия частиц сорта j с веществом, $\lambda^j(E)$ – вероятность распада на единице пути такой частицы, $K_{ij}\begin{pmatrix}E'\to E\\ \bar{\Omega}'\to\bar{\Omega}\end{pmatrix}$ – число частиц сорта j, вылетающих в единичном интервале энергии вблизи E и единичном телесном угле вблизи $\bar{\Omega}$ на один акт взаимодействия с веществом частицы сорта i, летящей в направлении $\bar{\Omega}'$ с энергией E, $N_{ij}\begin{pmatrix}E'\to E\\ \bar{\Omega}'\to\bar{\Omega}\end{pmatrix}$ – то же, что $K_{ij}\begin{pmatrix}E'\to E\\ \bar{\Omega}'\to\bar{\Omega}\end{pmatrix}$, но не на один акт взаимодействия, а на один акт распада, $\beta^j(E)$ – средние ионизационные потери энергии частицы сорта j на единице пути в веществе.

Преобразуя (I) по Фурье относительно $\bar{r}$ и направляя полярную ось системы координат вдоль вектора $\bar{p}$, получим

$$\left[ip\cos\hat{\theta} + \Sigma^j_{tot}(E) + \lambda^j(E) - \frac{\partial}{\partial E}\beta^j(E)\right]\tilde{G}^p(j,p,E,\hat{\Omega};j_0,E_0,\hat{\Omega}_0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{M}\int\limits_{4\pi} d\bar{\Omega}'\int\limits_{E}^{E_0} dE'\left[\Sigma^i_{tot}(E')K_{ij}\begin{pmatrix}E'\to E\\ \hat{\Omega}'\to\hat{\Omega}\end{pmatrix} + \lambda^i(E')N_{ij}\begin{pmatrix}E'\to E\\ \hat{\Omega}'\to\hat{\Omega}\end{pmatrix}\right]\times \qquad (2)$$

$$\times\tilde{G}^p(i,r,E',\hat{\Omega};j_0,E_0,\hat{\Omega}_0) + \delta_{jj_0}\delta(E-E_0)\delta(\hat{\Omega}-\hat{\Omega}_0),$$

где $\hat{\Omega}$, $\hat{\Omega}_0$ – вектора $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Omega}_0$ в системе координат, связанной с $\bar{p}$, $\hat{\theta}$ – угол между векторами $\bar{\Omega}$ и $\bar{p}$. Система (2) имеет такой же вид, как и соответствующая система уравнений, определяющая функцию Грина G^s для плоского источника и, следовательно, можно записать

$$\tilde{G}^p(j,\bar{p},E,\hat{\Omega};j_0,E_0,\hat{\Omega}_0) = \tilde{G}^s(j,p,E,\hat{\Omega};j_0,E_0,\hat{\Omega}_0), \qquad (3)$$

где

$$\tilde{G}^s(j,p,E,\hat{\Omega};j_0,E_0,\hat{\Omega}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ipz} G^s(j,z,E,\hat{\Omega};j_0,E_0,\hat{\Omega}_0),$$

а $G^s(j,z,E,\hat{\Omega};j_0,E_0,\hat{\Omega}_0)$ – функция распределения плотности потока частиц в однородной среде на расстоянии z от плоского мононаправленного и моноэнергетического источника. Выполняя обратное преобразование Фурье, для $G^p(j,\bar{r},E,\bar{\Omega};j_0,E_0,\bar{\Omega}_0)$ имеем

$$G^p(j,\bar{r},E,\bar{\Omega};j_0,E_0,\bar{\Omega}_0) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dp p^2 \int_{4\pi} d\bar{\omega} e^{ipr\bar{\omega}\bar{u}} \tilde{G}^s(j,p,E,\hat{\Omega};j_0,E_0,\hat{\Omega}_0), \qquad (4)$$

где $\bar{\omega} = \bar{p}/p$, $\bar{u} = \bar{r}/r$.

Выражение (4) определяет связь между функциями Грина для точечного и плоского источников в однородной среде в наиболее общем виде. Таким образом задача об отыскании функции Грина для точечного источника в однородной среде сводится к определению функции Грина плоскосимметричной задачи.

В дальнейшем нам будет удобнее работать с выражением, получающимся из (4), если угловые зависимости функций, входящих в его правую часть, разложить по сферическим гармоникам $Y_{n,m}(\bar{\Omega})$ и перейти к системе координат с полярной осью, направленной вдоль вектора $\bar{r}$ [x)].

[x)] Подобное выражение для функции распределения плотности потока гамма-квантов было получено У.Фано и др., /I/.

$$G^p(j,\vec{r},E,\vec{\Omega};j_o',E_o,\vec{\Omega}_o) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|m|\le k,n}\sum_{|m'|\le k,n}\sum_{l=|k-n|}^{k+n} (-1)^{m-m'}\sqrt{\frac{2k+1}{2n+1}}\frac{1}{2\pi r}\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} dp\,p e^{ipr} S_{l+1/2}(-2ipr)\tilde{\Phi}_k^m(j,p,E;j_o,E_o,n)Y_{k,m'}(\vec{\Omega})Y^*_{n,m'}(\vec{\Omega}_o)\times \qquad (5)$$

$$\times (km'n-m'|l0)(kmn-m|l0).$$

Здесь $(j_1m_1j_2m_2|jm)$ – коэффициенты Клебша-Гордона;

$$S_{l+1/2}(x) = \sum_{m=0}^{l} x^{-m}[(l+m)!/m!(l-m)!];$$

$$\tilde{\Phi}_k^m(j,p,E,\vec{\Omega};j_o,E_o,n) =$$

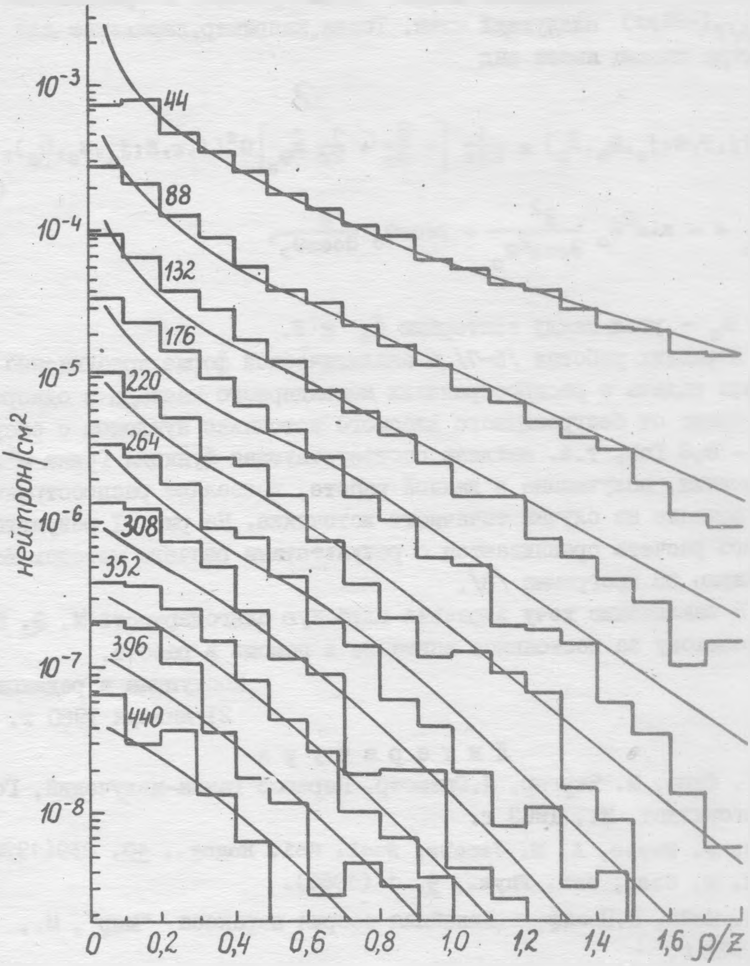
$$= \sqrt{4\pi/(2k+1)}\int_{4\pi} d\vec{\Omega}Y^*_{k,m}(\vec{\Omega})\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ipz}\Phi(j,z,E,\vec{\Omega};j_o,E_o,n);$$

$\Phi(j,z,E,\vec{\Omega};j_o,E_o,n)$ – функция распределения плотности потока частиц в случае плоского моноэнергетического источника с угловым распределением вида

$$S(\vec{\Omega},n) = \sqrt{(2n+1)/4\pi}\sum_{n=-m}^{m} Y_{n,m}(\vec{\Omega}). \qquad (6)$$

При больших r выражение (5) существенно упрощается. Учитывая, что при $r\to\infty$, $S_{l+1/2}\to 1$, получаем

$$G^p(j,\vec{r},E,\vec{\Omega};j_o,E_o,\vec{\Omega}_o) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}G^s(j,r,E,\vec{\Omega};j_o,E_o,\vec{\Omega}_o). \qquad (7)$$



Р и с. I. Полный поток нейтронов с энергией выше 20 МэВ от точечного мононаправленного источника нейтронов с энергией 0,6 ГэВ в алюминии как функция ρ/z при различных значениях z ($z = r\cos\theta_o$, $\rho = r\sin\theta_o$). Цифры у кривых - величина z в метрах, гистограммы - расчет методом Монте-Карло, кривые - аналитический расчет

Уточнить это выражение можно, если учесть в разложении $S_{l+1/2}(-2ipr)$ следующий член. Тогда,например,выражение для спектра частиц имеет вид

$$G^p(j,\vec{r},E;j_o,E_o,\vec{\Omega}_o) = \frac{1}{2\pi r}\left[-\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r}\hat{M}_{\theta_o}\right]G^s(j,r,E;j_o,E_o,\vec{\Omega}_o), \tag{8}$$

$$\hat{M}_{\theta_o} = -\sin^2\theta_o\frac{\partial^2}{\partial\cos^2\theta_o} + 2\cos\theta_o\frac{\partial}{\partial\cos\theta_o},$$

где θ_o - угол между векторами $\vec{\Omega}_o$ и $\vec{r}$.

В ранних работах /5-7/ в аналитической форме приближенно решена задача о распространении межъядерного каскада в однородной среде от безграничного плоского источника нуклонов с энергией 0,2 - 0,8 ГэВ, т.е. найдена соответствующая функция Грина G^s. Выражения, полученные в данной работе, позволяют распространить это решение на случай точечного источника. На рис. I результаты такого расчета сравниваются с результатами расчета методом Монте-Карло по программе /8/.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность М. В. Казарновскому за постоянное внимание и помощь в работе.

Поступила в редакцию
21 января 1980 г.

Литература

I. У. Фано, М. Бергер, Л.Спенсер. Перенос гамма-излучений, Госатомиздат, М., 1963 г.
2. J. F. Meyer, A. M. Jacobs, Nucl. Sci. Engng., 40, 239(1970).
3. K. M. Case, Ann. Phys., 9, 1 (1960).
4. К. Кейз, П.Цвайфель.Линейная теория переноса, "Мир", М., 1972 г.
5. М. В. Казарновский, С. В. Сережников, Препринт ИЯИ АН СССР, П-0042, М., 1976 г.
6. М. В. Казарновский, С. В. Сережников, Препринт ИЯИ АН СССР, П-0077, М., 1978 г.
7. М. В. Казарновский, С. В. Сережников, Препринт ИЯИ АН СССР, П-0100, М., 1978 г.
8. Н. М. Соболевский, Препринт ОИЯИ Б1-2-5458, Дубна, 1970 г.