Краткие сообщения по физике № 8 1980

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА

С. А. Решетняк, С. М. Харчев, Л. А. Шелепин

УДК 537.75

Исследовано нестационарное решение уравнения Фоккера-Планка путем использования теории Штурма-Лиувилля. Предложена методика последовательного расчета собственных значений. Проведено сравнение с результатами, получающимися на основе метода эволюционного оператора.

В настоящее время в физической кинетике существуют два подхода к построению асимптотических решений линейных кинетических уравнений. Первый основан на представлении решения в виде ряда по собственным функциям (с.ф.) и собственным значениям (с.з.), а второй - в виде ряда по степеням определенного эволюционного оператора $\hat{E}$ /1/. В данной работе оба подхода применяются к одномерному кинетическому уравнению Фоккера-Планка. С помощью предлагаемой методики расчета с.з. этого уравнения устанавливается связь между асимптотическим решением, учитывающим лишь минимальное по абсолютной величине с.з., и решением с нулевой и первой степенью оператора $\hat{E}$.

Рассмотрим уравнение Фоккера-Планка на отрезке [a, b]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(AU) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(BU) \qquad (I)$$

с граничными и начальными условиями

$$U|_{x=a} = U|_{x=b} = 0, \quad U|_{t=0} = \delta(x - x_0).$$

В соответствии с первым подходом, решение (I) можно представить в виде:

$$U = \sum_k \varphi_k(x)\varphi_k^*(x_0)\exp(-\lambda_k t), \qquad (2)$$

где $\{\lambda_k\}$ и $\{\varphi_k\}$ – с.з. и с.ф. следующей краевой задачи:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(B\varphi)+A\varphi\right]+\lambda\varphi=0; \quad \varphi(a)=\varphi(b)=0. \qquad (3)$$

Положим

$$\varphi=\rho\psi, \quad \rho=B^{-1}\exp\left\{-\int^{x} AB^{-1}d\xi\right\}. \qquad (4)$$

Замена (4) сводит (3) к задаче Штурма-Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{d\psi}{dx}\right)+\lambda\rho\psi=0, \quad \psi(a)=\psi(b)=0, \qquad (5)$$

где $k=B\rho$.

Известно /2/, что, если $A(x)$ и $B(x)$ дифференцируемые на $[a, b]$ функции и $B>0$ для $x\in[a, b]$, то с.з. задачи (5) положительны и невырождены, а соответствующие с.ф. могут быть ортонормированы на отрезке $[a, b]$ с весом $\rho(x)$ и обладают свойством полноты. Если коэффициенты в (I) и граничные условия вещественны, то и с.ф. также вещественны.

Введем в рассмотрение функцию Грина $G(x,y)$, удовлетворяющую краевой задаче

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dG}{dx}\right)=-\delta(x-y), \quad G|_{x=a}=G|_{x=b}=0. \qquad (6)$$

Легко показать, что она имеет вид:

$$G(x,y)=\left(\int_a^b k^{-1}(\xi)d\xi\right)^{-1}\begin{cases}\int_a^x k^{-1}(\xi)d\xi\int_y^b k^{-1}(\xi)d\xi, & x\leqslant y;\\ \int_a^y k^{-1}(\xi)d\xi\int_x^b k^{-1}(\xi)d\xi, & x\geqslant y,\end{cases} \qquad (7)$$

непрерывна в квадрате $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$ и обладает следующими свойствами:

$$G(x,y)=G(y,x);$$

$$\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=y+0}-\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=y-0}=-\frac{1}{k(y)}.$$

Задача Штурма-Лиувилля (5) эквивалентна однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром

$$\psi = \lambda \int_a^b G(x,y)\rho(y)\psi(y)dy. \qquad (8)$$

Для этого уравнения справедлива теория Гильберта-Шмидта /3/. В частности, имеет место разложение по с.ф. в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$G(x,y) = \sum_k \lambda_k^{-1}\psi_k(x)\psi_k(y).$$

Принимая во внимание условие ортонормированности с.ф., имеем:

$$\sum_k \lambda_k^{-1} = \mathrm{Sp}\, G = \int_a^b \rho(x)G(x,x)dx. \qquad (9)$$

Занумеруем с.з. в порядке их возрастания $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$. При $\lambda_0 \ll \lambda_1$ основной вклад в сумму (9) дает слагаемое с минимальным с.з. Поэтому

$$\lambda_0^{-1} \cong \mathrm{Sp}\, G = \left(\int_a^b k^{-1}(\xi)d\xi\right)^{-1} \int_a^b dx\rho(x) \int_a^x k^{-1}(\xi)d\xi \int_x^b k^{-1}(\xi)d\xi. \qquad (10)$$

Можно показать, что

$$\sum_k \lambda_k^{-n} = \mathrm{Sp}\, G_n = \int_a^b \rho(x)G_n(x,x)dx, \qquad (11)$$

где

$$G_n(x,y) = \int_a^b G(x,z)G_{n-1}(z,y)\rho(z)dz; \quad G_1(x,y) \equiv G(x,y),$$

$$n = 2,3,\ldots .$$

Формула (11) позволяет выполнить более детальный расчет минимального с.з.

$$\lambda_0^{-1} \cong (\mathrm{Sp}\, G_n)^{1/n}. \qquad (12)$$

Анализ показывает, что для первых двух с.з. при всех n и m имеют место следующие неравенства

$$A_n^{-1/n} \leqslant \lambda_0 \leqslant A_m/A_{m+1},$$

$$\lambda_o^{-1}\left(\frac{2}{A_n^2 - A_{2n}}\right)^{1/n} \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_o^{-1}\,\frac{A_n^2 - A_{2n}}{A_{n+1}^2 - A_{2n+2}}, \tag{I3}$$

где $A_n = \mathrm{Sp}\, G_n$. Неравенства (I3) можно использовать для вычисления с.з. и не удовлетворяющих условию $\lambda_0 \ll \lambda_1$. Действительно, с ростом номеров n и m указанные интервалы стягиваются в точку и, следовательно, с.з. могут быть вычислены с любой степенью точности. Аналогичные оценки существуют и для других с.з. Поэтому предлагаемая методика дает алгоритм последовательного вычисления всех с.з.

Перейдем теперь к построению асимптотического решения (I) в виде ряда по степеням оператора $\hat{E}$. Для этого положим

$$U = \rho V, \tag{I4}$$

где функция ρ определена формулой (4). Функция V удовлетворяет уравнению

$$\rho\,\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial V}{\partial x}\right). \tag{I5}$$

Интегрируя дважды по x правую и левую части (I5) с учетом граничного условия $V(a) = 0$, получаем

$$V = V_e + \hat{E}V, \tag{I6}$$

где

$$V_e = j\int_a^x k^{-1}(\xi)d\xi, \quad j = k(\partial V/\partial x)\big|_{x=a},$$

$$\hat{E} = \int_a^x k^{-1}(\xi)d\xi\int_a^\xi d\eta\rho(\eta)(\partial/\partial t).$$

Функция V_e соответствует стационарному решению с зависящим от времени параметром j. Этот параметр с точностью до знака задает поток плотности распределения в точке x = a.

Применяя метод итераций, представим решение (I6) в виде ряда по степеням оператора $\hat{E}$:

$$V = V_e + \hat{E}V_e + \hat{E}^2V_e + \ldots \qquad (17)$$

Рассмотрим асимптотическое решение, содержащее первые два члена разложения (I7)

$$V = j\int_a^x k^{-1}(\xi)d\xi + \int_a^x k^{-1}(\xi)d\xi \int_a^\xi d\eta\rho(\eta) \int_a^\eta k^{-1}(\mu)d\mu(dj/dt). \qquad (18)$$

Учитывая второе граничное условие $V(b) = 0$, для параметра j получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого дает

$$j \sim \exp(-\lambda_0 t),$$

$$\lambda_0^{-1} = \left(\int_a^b k^{-1}(\xi)d\xi\right)^{-1} \int_a^b k^{-1}(\xi)d\xi \int_a^\xi dx\rho(x) \int_a^x k^{-1}(\eta)d\eta. \qquad (19)$$

Изменяя порядок интегрирования во втором множителе, получаем

$$\lambda_0^{-1} = \left(\int_a^b k^{-1}(\xi)d\xi\right)^{-1} \int_a^b dx\rho(x) \int_a^x k^{-1}(\xi)d\xi \int_x^b k^{-1}(\eta)d\eta. \qquad (20)$$

Легко видеть, что формулы (I0) и (20) в точности совпадают. При подстановке (I9) в (I7) возникает знакочередующийся ряд с монотонно убывающими по абсолютной величине членами и, следовательно, сходящийся.

Таким образом, в рассмотренном случае асимптотические решения уравнения Фоккера-Планка находятся в полном соответствии друг с другом. Эти решения правильно отражают кинетику процесса с моментов времени, начиная с которых членами с более высокими с.з. можно пренебречь, и тем самым, как показывают конкретные расчеты /4/, адекватно описывают практически наиболее интересную стадию процесса.

Поступила в редакцию
21 марта 1980 г.

Л и т е р а т у р а

1. С. А. Решетняк, Л. А. Шелепин, Физика плазмы, 3, 859 (1977).
2. В. Я. Арсенин, Методы математической физики и специальные функции, "Наука", М., 1974 г.
3. У. В. Ловитт, Линейные интегральные уравнения, Гостехиздат, М., 1975 г.
4. С. А. Решетняк, Л. А. Шелепин, Труды ФИАН, 106, 90 (1978).