Краткие сообщения по физике № 10 1980

ОБ ИНСТАНТОННОМ ВКЛАДЕ В ПОТЕНЦИАЛ МЕЖДУ КВАРКАМИ

Б. В. Иванов*), В. Я. Файнберг

УДК 530.I45

Известно /I/, что в приближении разреженного инстантонного газа потенциал V(R) между тяжелыми кварками, обусловленный инстантонными флюктуациями, стремится к постоянной величине на больших расстояниях и не может обеспечить удержание кварков. Показано, что этот вывод сохраняет силу при выходе за рамки газового приближения.

Калибровочно-инвариантное определение статического потенциала V(R) можно записать с помощью континуального интеграла от вильсоновской P-экспоненты, где интеграл берется по контуру ширины R и длины T:

$$V(R) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \int [dA]_n \exp(-S[A]) \frac{1}{N} \operatorname{tr} P\exp(i\oint A_\mu dx_\mu)}{\sum_{n=1}^{\infty} \int [dA]_n \exp(-S[A])}. \quad (I)$$

Для простоты параметр θ положен равным нулю; $\int [dA]_n$ означает интегрирование по n-инстантонному топологическому классу. В приближении разреженного инстантонного газа для SU(N):

$$V(R) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int [dA]_1 \exp(-S[A]) \frac{1}{N} \operatorname{tr}\left[P\exp(i\oint A_\mu dx_\mu) - 1\right]. \quad (2)$$

В квазиклассическом приближении эта величина была вычислена в работах /I,2/ и равна для SU(3):

---

*) Московский Государственный университет им. М. В. Ломоносова.

$$V(R) = 2\int_0^\infty d\rho\, \frac{0{,}1}{\rho^5}\left(\frac{8\pi^2}{g^2}\right)^6 \exp\left(-\frac{8\pi^2}{\tilde{g}^2(\rho\mu)}\right)\rho^3 W\left(\frac{R}{\rho}\right), \qquad (3)$$

где

$$W\left(\frac{R}{\rho}\right) = -\frac{2}{3\rho^3}\int d\vec{a}\left\{\cos\frac{\pi a}{\sqrt{\rho^2+a^2}}\cos\frac{\pi|\vec{a}-\vec{R}|}{\sqrt{\rho^2+(\vec{a}-\vec{R})^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\vec{a}(\vec{a}-\vec{R})}{a|\vec{a}-\vec{R}|}\sin\frac{\pi a}{\sqrt{\rho^2+a^2}}\sin\frac{\pi|\vec{a}-\vec{R}|}{\sqrt{\rho^2+(\vec{a}-\vec{R})^2}} - 1\right\}. \qquad (4)$$

Коэффициент 2 в (3) учитывает вклад инстантона и антиинстантона; параметр ρ характеризует размер инстантона; μ – точка нормировки, $\tilde{g}^2(\rho\mu)$ – ренорминвариантный заряд.

Исследование функции $W(R/\rho)$ показывает /I/, что при $R/\rho \ll 1$ она $\sim(R/\rho)^2$, а в пределе $R/\rho \gg 1$ стремится к постоянной величине. Это и означает, что квазиклассическое приближение для разреженного инстантонного газа не приводит к растущему с R потенциалу и поэтому не обеспечивает удержание кварков.

Попытаемся оценить поправки к $V(R)$ в (I) за счет учета корреляций между инстантонами в двухинстантонном приближении. Они приводят к тому, что двухинстантонный вклад содержит также член $\sim T$, который дает искомую поправку. Другими словами, двухинстантонный вклад можно представить при больших T в виде:

$$J = AT^2 + V^{(2)}(R)T + C, \qquad (4)$$

а потенциал между кварками будет

$$V(R) = V^{\text{газ}}(R) + V^{(2)}(R). \qquad (5)$$

Введем следующие обозначения для величин в квазиклассическом приближении:

$$\int [dA]_1 \exp(-S[A]) = \int \Phi(\hat{a})d\hat{a}, \qquad (6)$$

$$\frac{1}{2}\int [dA]_1 \exp(-S[A])\,\mathrm{tr}P\exp(i\oint A_\mu dx_\mu) = \int \Phi(\hat{a})U d\hat{a}, \qquad (7)$$

где $\hat{a} \equiv (a,\rho)$, $d\hat{a} = d\rho d^4 a$; для SU(2) /1,2/:

$$\Phi(\hat{a}) = \frac{c}{\rho^5}\left(\frac{8\pi^2}{g^2}\right)^4 \exp\left(-\frac{8\pi^2}{\tilde{g}^2(\mu\rho)}\right), \; U \equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{trPexp}(i\oint A_\mu^{(1)}dx_\mu), \tag{8}$$

где $A_\mu^{(1)}$ – одноинстантонное решение;

$$\int [dA]_2 \exp(-S[A]) = \int \Phi(\hat{a}_1,\hat{a}_2)d\hat{a}_1 d\hat{a}_2, \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}\int [dA]_2 \exp(-S[A])\,\mathrm{trPexp}(i\oint A_\mu dx_\mu) = \int \Phi(\hat{a}_1,\hat{a}_2)d\hat{a}_1 d\hat{a}_2 U_{12}, \tag{10}$$

где $U_{12} \equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{trPexp}(i\oint A_\mu^{(2)}dx_\mu)$ и $A_\mu^{(2)}$ есть двухинстантонное решение. Интегрирование по a_{io} ведется от 0 до T.

В общем случае: несмотря на то, что задача о нахождении многоинстантонных решений в принципе решена /3/, их явная зависимость от всех параметров неизвестна. Попытки вычислить $\Phi(\hat{a}_1,\hat{a}_2)$ и более высокие корреляционные распределения $\Phi(\hat{a}_1,\ldots,\hat{a}_n)$ сделаны в работе /4/, однако окончательные выражения содержат неопределенные функции. Поэтому о $\Phi(\hat{a}_1,\hat{a}_2)$ мы не будем делать никаких предположений, а лишь используем некоторые ее общие свойства. Точное двухинстантонное решение Хуфта /6/ возьмем в виде суммы одноинстантонных вкладов[ж)]

$$A_\mu^{(2)} \simeq -\sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_i^2[(\tau,x-a_i)\tau_\mu - (x-a_i)_\mu]}{(x-a_i)^2\left[\rho_i^2 + (x-a_i)^2\right]}. \tag{11}$$

Разложим в ряд по степеням $\exp(-8\pi^2/\tilde{g}^2)$ выражение под знаком логарифма в (I). Точный двухинстантонный вклад (4) можно записать в виде:

$$J = \int d\hat{a}_1 d\hat{a}_2 \Phi(\hat{a}_1,\hat{a}_2)(U_{12} - U_1 U_2) + \int d\hat{a}_1 d\hat{a}_2 \Phi(\hat{a}_1,\hat{a}_2)(U_1-1)(U_2-1) +$$

$$+ 2\int\left[\Phi(\hat{a}_1,\hat{a}_2) - (1/2)\Phi(\hat{a}_1)\Phi(\hat{a}_2)\right](U_1-1)d\hat{a}_1 d\hat{a}_2. \tag{12}$$

ж) Это не эквивалентно газовому приближению, поскольку $\exp(i\int(A_1 + A_2)_\mu dx_\mu) \neq \exp(i\int A_{1\mu}dx_\mu)\exp(i\int A_{2\mu}dx_\mu)$, что означает отсутствие кластеризации многоинстантонного вклада даже когда $|a_i - a_j| \to \infty$.

Когда $\Phi(\hat{a}_1,\hat{a}_2) = (1/2)\Phi(\hat{a}_1)\Phi(\hat{a}_2)$ первый и третий члены исчезают, а второй равен: $(1/2)\left[\int \Phi(\hat{a}_1)(U_1-1)d\hat{a}_1\right]^2$, т.е. газовому приближению для двухинстантонного вклада.

Поскольку при T и $V \to \infty$ член

$$\int \Phi(\hat{a}_1,\hat{a}_2)d\hat{a}_1 d\hat{a}_2 = T^2V^2\left[f(\rho_1,\rho_2) + O\left(\frac{1}{T}, \frac{1}{V}\right)\right],$$

мы заключаем; что при $a_i/\rho_i \gg 1$

$$|\Phi(\hat{a}_1,\hat{a}_2)| \leqslant f(\rho_1,\rho_2) + O(\rho_i/a_i). \tag{I3}$$

Оценим приближенно также U_{12}. Сначала пренебрежем знаком P упорядочивания в U_{12} (см. Обсуждение). Далее можно показать, что вклад в (4) интегралов от 0 до R обратно по контуру в экспонентах U_{12} и U_1, U_2 не содержит членов, растущих с T. Отбрасывая эти члены, имеем ($T \gg R$):

$$U_{12} = \cos F \cos F_o + \hat{n}\hat{n}_o \sin F \sin F_o, \tag{I4}$$

$$U_i = \cos F_i \cos F_{oi} + \hat{n}_i\hat{n}_{oi} \sin F_i \sin F_{oi}, \tag{I5}$$

$$F = F_1 + F_2; \quad F_0 = \hat{n}_1 F_{10} + \hat{n}_2 F_{20}; \quad \hat{n}_i = \hat{a}_i/a_i,$$

$$F_i = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\beta_i}}\right) + \operatorname{arctg}\frac{T - a_{oi}}{\sqrt{1+\beta_i}} - \frac{1}{\sqrt{1+\beta_i}}\operatorname{arctg}\frac{T - a_{oi}}{R\sqrt{1+\beta_i}},$$

$$F_{oi} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_i}}\right) + \operatorname{arctg}\frac{T - a_{oi}}{a_i} - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_i}}\operatorname{arctg}\frac{T - a_{oi}}{a_i\sqrt{1+\alpha_i}},$$

$$\beta_i = \rho_i^2/R^2; \ \alpha_i = \rho_i^2/a_i^2, \quad i = 1,2.$$

Выделяя из U_i и U_{12} члены, не зависящие от $R(\rho_i/R \gg 1)$, получаем для (I2) выражение:

$$J \approx 2\int d\hat{a}_1 d\hat{a}_2 \Phi(\hat{a}_1,\hat{a}_2)\left[\cos F_0 - \cos F_{10}\cos F_{20} - (\cos F_{10} - 1)\times\right.$$

$$\left.\times(\cos F_{20} - 1)\right] + 4\int d\hat{a}_1 d\hat{a}_2 \Phi(\hat{a}_1,\hat{a}_2)(\cos F_{10} - 1)(\cos F_{20} - 1) +$$

$$+ 4\int d\hat{a}_1 d\hat{a}_2\left[\Phi(\hat{a}_1,\hat{a}_2) - (1/2)\Phi_1(\hat{a}_1)\Phi_2(\hat{a}_2)\right](\cos F_{10} - 1) + \ldots . \tag{16}$$

Все выписанные члены не содержат зависимость от R. Сходимость по $\bar{a}_1$ первых двух членов вытекает из свойств (13) $\Phi(\hat{a}_1,\hat{a}_2)$ и из того факта, что при $\alpha_i \to 0$ $F_{oi} \sim \alpha_i$ и, следовательно, $\cos F_{oi} - 1 \sim \sim \alpha_i^2 \sim (\rho_i^2/a_i^2)^2$. Сходимость третьего члена в (16) обусловлена тем, что разность $\Phi(\hat{a}_1,\hat{a}_2) - (1/2)\Phi(\hat{a}_1)\Phi(\hat{a}_2)$ должна убывать быстрее $|\bar{a}_1 - \bar{a}_2|^{-(4+\delta)}$, $\delta > 0$, так как в противном случае энергия инстантонного вакуума росла бы быстрее, чем V.

Отброшенные в (16) члены имеют порядок (до интегрирования по ρ_i) $\sim \rho_i/R$. Таким образом в рассматриваемом приближении учет корреляций между инстантонами дает добавки к потенциалу, не растущие с увеличением R, и следовательно, не обеспечивает удержание кварков в статическом приближении.

Обсудим кратко результаты.

1. Если в (12) выделить двухинстантонный вклад в газовом приближении, то поправки будут иметь тот же самый вид (16), исключая замену $\Phi(\hat{a}_1,\hat{a}_2)$ во втором члене на разность $\Phi(\hat{a}_1,\hat{a}_2) - (1/2)\Phi(\hat{a}_1)\Phi(\hat{a}_2)$.

2. Основная проблема - расходимость в (16) интегралов при больших размерах инстантонов. Если эта расходимость, как в ряде решаемых моделей /5/, может быть устранена только в результате суммирования по всем многоинстантонным состояниям, то окончательный результат может претерпеть качественные изменения. Однако, имеются веские аргументы что это не так. В статическом приближении $V(R) = \tilde{g}^2(\mu R)/R$. Поэтому (3) при такой замене можно рассматривать как интегральное уравнение для V(R) или для $\tilde{g}^2(\mu R)$. Тогда и в газовом приближении и с учетом двухстантонных корреляций, мы получим сходящиеся по ρ_i интегралы при условии $V(R) \to \mathrm{const}$, если $R \to \infty$.

3. Предварительная оценка многоинстантонных корреляций в аналогичном приближении не меняет главного вывода этой заметки.

4. Учет корреляций между инстантонами при $\rho R \ll 1$ дает в $V(R)$, также как и в газовом приближении, члены $\sim R^2$.

5. Можно показать, что учет корреляций между инстантоном и антиинстантоном (замена в F и в F_0 суммы на соответствующую разность) не влияет качественно на результат.

6. Отбрасывание P-произведения в U_{12} делает результат, вообще говоря, калибровочно-неинвариантным. Роль этого важного пункта необходимо выяснить. Но из физических соображений ясно, что отсутствие возрастающих с R членов обусловлено тем, что взаимодействие инстантонов не растет при $|a_1 - a_2|/\rho_1 \to \infty$. Поэтому учет P-произведения врядли качественно повлияет на ответ.

7. Учет точного двухинстантонного решения в U_{12} также позволяет выделить члены, не зависящие от R, и показать, что оставшиеся члены убывают с ростом R. Таким образом точные расчеты, по всей вероятности, дадут результаты согласующиеся с выводами этой заметки.

Поступила в редакцию
4 апреля 1980 г.

Литература

1. G. G. Callan jr., R. Dashen, D. J. Gross, Phys. Rev., 17D, 2717 (1978); G. G. Callan, R. Dashen, D. J. Gross, F. Wilczek, A. Zee, Phys. Rev., 18D, 4684 (1978).
2. G. 't Hooft, Phys. Rev., 14D, 3432 (1976); A. A. Belavin, A. M. Polyakov, Nucl. Phys., 123B, 429 (1977).
3. M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld, Yu. I. Manin, Phys. Lett., 65A, 185 (1978).
4. I. V. Frolov, A. S. Schwarz, Phys. Lett., 80B, 406 (1978); A. A. Belavin, V. A. Fateev, A. S. Schwarz, Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett., 83B, 317 (1979).
5. И. В. Фролов, А. С. Шварц, Письма в ЖЭТФ, 28, 273 (1978).
6. G. 't Hooft, Coral Gables Conference, 1977.