9 ЄО

Краткие сообщения по физике № 12 1980

О НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ ГЕНЕРАЦИИ МАЗЕРОВ

К. В. Владимирский, А. А. Норвайшас

УДК 621.375.823

Исследуются далекие от монохроматических решения уравнений динамики мазера, работающего на неоднородно уширенной линии.

Основные уравнения, описывающие динамику генерации на неоднородно уширенной линии, имеют вид /I,2/:

$$\begin{aligned} dp/dt + p - hq - kr\bar{p} &= 0, \\ dq/dt + q + hp - kr\bar{q} &= 0, \\ dr/dt + r + k(\bar{p}p+\bar{q}q) &= 1. \end{aligned} \qquad (I)$$

Здесь p, q, r – безразмерные компоненты вектора ядерной намагниченности, h – расстройка резонансной частоты, k – коэффициент усиления в петле обратной связи, $\bar{p}$, $\bar{q}$ – компоненты ядерной намагниченности, усредненные с весом $g(h)$, $g(h)$ – форм-функция, характеризующая неоднородное уширение линии. Преобразование уравнений (I) к вращающейся системе координат сводится к появлению аддитивной константы в параметре h. При соответствующем выборе скорости вращения монохроматическим режимам генерации соответствуют устойчивые положения равновесия системы (I)

Экспериментальные данные /3/ дают основание ожидать разнообразия типов и сложной структуры решений уравнений (I). В системах, динамика которых может быть описана этими уравнениями (или близкими к ним), наблюдаются помимо монохроматических колебаний генерация на нескольких линиях рабочего вещества одновременно, релаксационные колебания, неустойчивые режимы, подобные суперрегенеративным. В работах /I,2/ рассмотрены уравнения (I), линеаризованные в окрестности положений равновесия. Исследование процессов, далеких от монохроматической генерации, требует более подробного изучения исходных нелинейных уравнений (I).

Из общих свойств уравнений (I) легко доказывается ограниченность решений. Рассмотрим модуль m вектора $\{p, q, r\}$. Дифференцируя m^2, в силу системы уравнений (I) получаем:

$$m\,dm/dt = -m^2 + r, \tag{2}$$

откуда следует, что при любых начальных условиях значения p, q, r при $t \to \infty$ для всех значений параметра h заключены внутри сферы $m \leq 1$. Система (I), таким образом, диссипативна /4/.

В настоящей работе рассматривается простейшая модель неоднородного уширения – симметричная раздвоенная линия /I/. Интегродифференциальные уравнения (I) сводятся для этого случая к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

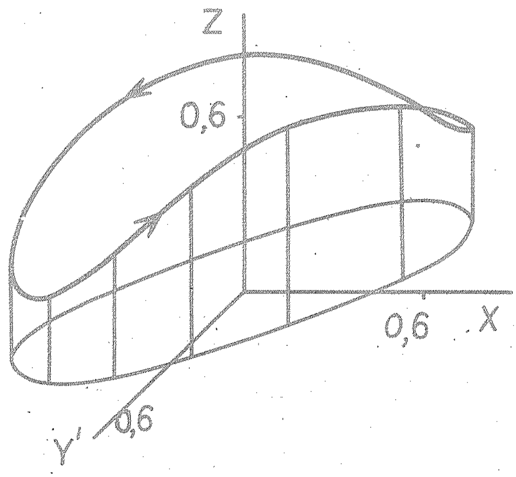
$$\begin{aligned}
&dx/dt + x - \delta y' - kxz = 0,\\
&dx'/dt + x' - \delta y - kxz' = 0,\\
&dy/dt + y + \delta x' - kyz = 0,\\
&dy'/dt + y' + \delta x - kyz' = 0,\\
&dz/dt + z + k(x^2 + y^2) = 1,\\
&dz'/dt + z' + k(xx' + yy') = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь x, y, z – средние значения p, q, r для $h = -\delta$, δ; x', y', z' – полуразности, пропорциональные моментам первого порядка.

Важный класс частных решений, соответствующий сохранению мгновенной частоты генерации, можно выделить (с точностью до фазы), полагая $x' = y = z' = 0$. Для получающейся таким образом системы третьего порядка (3′) можно использовать некоторые аналитические результаты, содержащиеся в работе /5/.

Основным средством исследования явилось численное решение уравнений. Обнаружено существование большого числа устойчивых периодических решений уравнений (3), отличных от положений равновесия. Диссипативные свойства системы позволяют искать эти решения, используя более или менее произвольные начальные условия. Однако, в тех случаях, когда число решений более одного (система не конвергентна), выбор начальных условий уже не безразличен. Более того, нахождение таким путем всех периодических решений может быть очень трудной задачей. Для нахождения периодических решений помимо "естественного" процесса установления применялись специальным образом построенные программы численных вычислений, включающие интегрирование системы за период и итерационный процесс уменьшения невязки начала и конца траектории. Этот метод значительно увеличивает скорость сходимости и позволяет получать не только устойчивые, но также и неустойчивые решения.

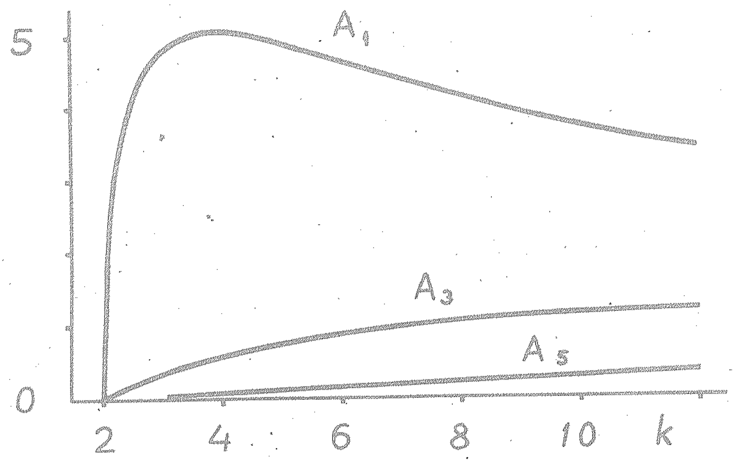
Несмотря на то, что найденные указанным путем периодические решения (предельные циклы) очень далеки от решений, которые можно получить рассматривая линеаризованные уравнения, общую качественную характеристику этих решений можно дать, используя результаты анализа устойчивости положений равновесия двух типов. На границе области устойчивости тривиального решения



Р и с. I. Пример простейшего немонохроматического решения

$k = 2$ линеаризованные уравнения имеют решения в виде замкнутых кривых, охватывающих ось z. На границе области устойчивости одночастотного решения $\delta^2 = 1$ решения линеаризованных уравнений имеют вид кривых, не охватывающих ось z. Найденные в результате численных вычислений сложные предельные циклы представляют устойчивые периодически повторяющиеся последовательности петель двух указанных видов.

Простейшими из немонохроматических решений являются предельные циклы, охватывающие одной петлей ось z. Пример такого решения для $k = 4$, $\delta^2 = 2,5$ дан на рис. I. Предельные циклы этого типа являются решениями системы третьего порядка (3$'$), ядерная намагниченность и радиочастотное поле в резонаторе представляют линейно поляризованные колебания вида: $x = A_1\cos\Omega t + A_3\cos(3\Omega t + \varphi_3) + \ldots$, $y = 0$. На рис. 2 показана зависимость спектрального состава такого решения от коэффициента усиления k для $\delta^2 = 2,5$. Переходя к циркулярным компонентам и к лабораторной системе координат можно показать, что при $\delta^2 \gg 1$ и



Р и с. 2. Зависимость спектрального состава решения от коэффициента усиления в петле обратной связи значениях k не слишком далеких от порога самовозбуждения спектр решения состоит из двух частот, близких к частотам линий образующих распределение $g(h)$, с небольшой примесью комбинационных тонов более высоких порядков. В этом смысле здесь можно говорить о двухчастотной генерации. (В точном смысле независимая генерация на двух линиях рабочего вещества одновременно невозможна. Такой процесс не будет предельным циклом какой-либо невырожденной системы дифференциальных уравнений). При увеличении коэффициента усиления увеличивается содержание высоких гармоник и возникают предельные циклы более сложной структуры.

Изучение немонохроматических решений существенно в вопросах исследования устойчивости одночастотных решений (устойчивости "в большом"). Область существования устойчивых немонохроматических решений уравнений (3) перекрывается с областью устойчивости одночастотных решений $\delta^2 < 1$, что является указанием на опасный характер границы /6/. Это последнее обстоятельство было строго подтверждено вычислением первого ляпуновского коэффициента для границы области (для $\delta^2 = 1$):

$$L = \frac{\pi k^2}{2\sqrt{2}\sqrt{k-2}} \frac{1 + 4(k-2)}{1 + 8(k-2)} > 0. \qquad (4)$$

Вычисление проведено для системы третьего порядка (3′), что не уменьшает общности результата, так как для доказательства опасного характера границы достаточно показать существование всего одной траектории, уводящей из окрестности исходного решения. Противоположный результат исследования в /I/ основан на нестрогом использовании приближенных решений.

Авторы благодарны А. Н. Любимову за обсуждение вопросов, затронутых в настоящей работе и Е. Д. Булатову за большую помощь в организации численных вычислений.

Поступила в редакцию
I6 июня 1980 г.

Литература

1. К. В. Владимирский, Краткие сообщения по физике ФИАН № 10, 41 (1971); № 3, 47 (1972); № 5, 19 (1973); Диссертация, Москва, 1974 г.
2. К. В. Владимирский, А. А. Норвайшас, Краткие сообщения по физике ФИАН № 7, 16 (1977); № 10, 37 (1977).
3. К. В. Владимирский, Б. А. Лабзов, ПТЭ № 2, 103 (1962); K. V. Vladimirsky, B. A. Labzov, Proc. X Coll. Spectr. Intern., Spartan Books, Washington, 1963; В. Г. Веселаго, Ю. В. Косичкин, Радиотехника и электроника, 7, 6, (1963); K. W. Gray, I. Ozier, Phys. Rev. Lett., 26, 161 (1971); Ю. С. Константинов, А. М. Смирнов, ПТЭ № 5, 135 (1972).
4. В. А. Плисс, Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений, Наука, М., 1977 г.
5. S. Sherman, Contributions to differential equations, vol. 2, ed. by J. P. La Salle, J. H. Diaz, Wiley, N.-Y., 1963, p.197.
6. Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, ГТТИ, М.-Л., 1946 г; Н. Н. Баутин, Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, ГТТИ, М.-Л., 1949 г.