Краткие сообщения по физике № 5 1979

СОЛИТОНЫ В СРЕДАХ С ИНВЕРСНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

А. А. Веряев, В. Н. Цытович

УДК 533.951

Аналитически и численно на ЭВМ проведено рассмотрение солитонных решений в средах с инверсной дисперсией $\sim k^{-2}$.

Рассмотрение нелинейных волн огибающих в средах с инверсной дисперсией

$$\omega = \omega_0(1 - \alpha/2k^2), \quad \alpha/2k^2 \ll 1 \tag{I}$$

требует исследования следующей системы уравнений /I,2/:

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\left(i\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} - \nu \mathcal{E}\right) = \mathcal{E}\frac{\alpha}{|\alpha|} \qquad \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\nu - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\nu = \frac{\partial^2 |\mathcal{E}|^2}{\partial \zeta^2}. \tag{2}$$

Здесь τ, ζ, $\mathcal{E}$, ν – соответственно безразмерные время, координата, комплексная огибающая ВЧ поля и возмущение плотности. К системе уравнений (2) приводят задачи о распространении ленгмюровских волн конечной амплитуды в плазме с группой быстрых частиц, которыми определяется дисперсия волн, о распространении ионно-звуковых колебаний с частотами, близкими к $\omega_{pi} = \sqrt{4\pi n_0 e_i^2/m_i}$ /2/, о распространении потенциальных волн, в частности, нижне-гибридных, в ограниченной плазме и волноводах /3/. В настоящей работе аналитически и численно рассматривается вопрос о существовании в рамках системы (2) уединенных волн (солитонов), огибающая которых движется с постоянной скоростью.

В случае, когда $\nu = \nu(\xi) = \nu(\zeta - u\tau)$, второе из уравнений (2) легко интегрируется. Подставив полученный результат в первое уравнение (2), представив $\mathcal{E}$ в виде (u – безразмерная постоянная скорость, измеряемая в единицах скорости звука, Ω – нелинейный сдвиг частоты)

$$\mathcal{E} = \psi(\xi)\exp(iS); \quad \frac{\partial S}{\partial \tau} = -\Omega - ku; \quad \frac{\partial S}{\partial \xi} = k(\xi) \tag{3}$$

и, наконец, разделив действительные и мнимые части этого уравнения, можно получить следующий интеграл /2/:

$$\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{d}{d\xi}\psi^2 R\right)^2 + M^2 = 2\psi^2 R + \text{const}; \quad \alpha > 0$$

$$\frac{dM}{d\xi} = \frac{k}{\psi}\frac{d}{d\xi}\psi^2 R; \quad V = ku + \Omega + \frac{\psi^2}{1 - u^2} \tag{4}$$

$$u\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \psi_k V + M; \quad R = ku + \frac{\Omega}{2} + \frac{3\psi^2}{4(1 - u^2)}.$$

Нужную асимптотику решений ($\psi \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$) можно получить из (4) лишь в случае

$$u/\Omega^2 \ll \Omega/u \quad (u > 1, \ \Omega \gg 1). \tag{5}$$

При выполненном неравенстве (5) система уравнений (4) сводится приближенно к следующей:

$$M = u\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \psi kV; \quad k = \frac{u\dfrac{d^3\psi}{d\xi^3} - \dfrac{d}{d\xi}\psi kV}{\dfrac{d}{d\xi}\psi\left(\Omega + \dfrac{\psi^2}{1 - u^2}\right)}, \tag{6}$$

$$\left(1 + \frac{3\psi^2}{\Omega(1 - u^2)}\right)^2\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2 + \frac{u^2}{\Omega^2}\left[\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \frac{\psi k\Omega}{u}\left(1 + \frac{\psi^2}{\Omega(1 - u^2)}\right)\right]^2 =$$

$$= \frac{\psi^2}{\Omega}\left(1 + \frac{3\psi^2}{2\Omega(1 - u^2)}\right). \tag{7}$$

Уравнение (7) получено непосредственно из первого уравнения системы (4) при const = 0. Второй член в (7) мал по сравнению с первым в отношении $u^2/\Omega^3 \ll 1$, (так как $\psi \sim \sqrt{|\Omega|}$, $\xi \sim \sqrt{|\Omega|}$), и его следует учитывать только в окрестности особенности, где коэффициент при первом члене близок к нулю. При $\Omega > 0$, $u < 1$ особенности нет и им можно пренебречь, и тогда из (7) видно, что это уравнение ограниченных решений не имеет. Если $\Omega < 0$, $u < 1$, то правая часть положительна только при $\psi^2 > (2/3)|\Omega|(1 - u^2)$, т.е. опять солитонных решений нет. При $\Omega < 0$, $u > 1$ такие решения также отсутствуют. Наконец, при $\Omega > 0$, $u > 1$ имеется особая точка при

$\psi^2 = \psi_c^2 \equiv \Omega(u^2 - 1)/3$. Вдали от этого значения ψ можно пренебречь вторым слагаемым в (7) и получить

$$\psi = \psi' \exp\left(-\frac{|\xi|}{\sqrt{\Omega}}\right) = \psi' \exp(-|\xi|/\xi_*). \qquad (8)$$

Решение (8) уравнения (7) непригодно при

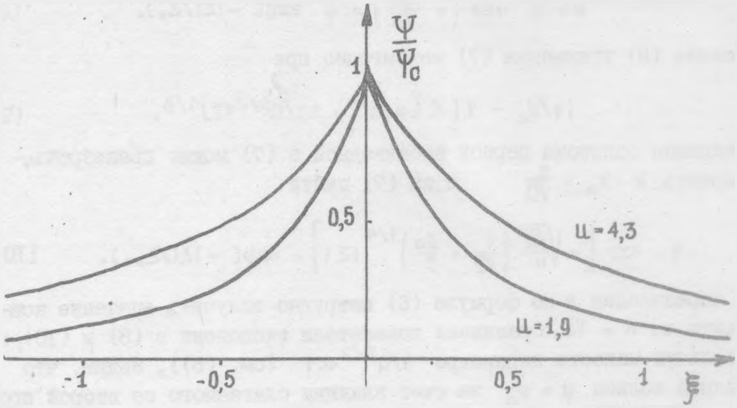
$$|\psi/\psi_c - 1| < [u(u^2 - 1)/\Omega^{3/2}\sqrt{2}]^{1/3}. \qquad (9)$$

В вершине солитона первой производной в (7) можно пренебречь, положить $k \sim k_0 = \frac{c}{\sqrt{\Omega}}$ и из (7) найти

$$\psi \sim \exp\left[-\sqrt{\frac{\sqrt{\Omega}}{u}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2c}{3}\right)^{1/4}|\xi|\right] = \exp(-|\xi|/\xi_{**}). \qquad (10)$$

Из определения k по формуле (6) нетрудно получить значение константы c: $c = \sqrt{2}$. Сравнивая показатели экспонент в (8) и (10), и используя малость параметра $u/\Omega^{3/2} \ll 1$ (см. (5)), видим, что решение вблизи $\psi = \psi_c$ за счет влияния слагаемого со второй производной в (7) начинает расти быстрее, т.е. солитон имеет два характерных масштаба. Уравнение (7) при различных значениях параметров u, Ω, удовлетворяющих (5), интегрировалось численно на ЭВМ. При использовании метода Милна отход осуществлялся от точки $\xi = 0$, $\psi = \psi_c$ с различными производными $d\psi/d\xi$. При единственном значении $d\psi/d\xi$ осуществлялся выход решения на асимптотику (8); это проверялось по поведению кривой $\psi = \psi(\xi)$. Огибающая получающегося в результате интегрирования солитона приведена на рис.1, где $\Omega = 5{,}6$, $u = 1{,}9$ и $u = 4{,}3$ ($u \ll \Omega^{3/2} = 13{,}26$). Полученные солитоны являются двухпараметрическим семейством решений системы (2). Ширина внутренней части $\xi_{**} \sim \sqrt{u\sqrt{u^2 - 1}/\psi_c}$; для $u \gg 1$ она пропорциональна скорости солитона, ξ_{**} обратно пропорциональна корню квадратному из амплитуды. Ширина внешней части солитона $\xi_* = \sqrt{\Omega} = \psi_c\sqrt{3/(u^2 - 1)}$ пропорциональна амплитуде и при $u \gg 1$ обратно пропорциональна скорости солитона. Фаза солитона $\int_0^{\xi} k(\xi')d\xi'$ при $\xi \to 0$, $\psi \to \psi_c$ непрерывна и конечна. Можно все величины в определении ξ_* и ξ_{**} выразить через амплитуду солитона $\psi_c = \sqrt{\Omega(u^2 - 1)/3}$ и скорость u.

Оценка показывает, что учет тепловой дисперсии $Dk^2/2$ ВЧ колебаний приводит к тому, что при приближении ψ к ψ_c роль высших производных в уравнении (7), наличие которых обусловлено такой дисперсией, растет. Поэтому на характерном размерном интервале



Р и с. I. Зависимость амплитуды огибающей $\psi(\xi)/\psi_c$ солитона от координаты ξ; $\Omega = 5{,}6$, $u = 1{,}9; 4{,}3$

$|x| < x_* = (D/\alpha)^{1/4}$ представляло бы самостоятельный интерес более детальное численное изучение влияния тепловой дисперсии $Dk^2/2$ на особенность (разрыв первой производной) решения, представленного на рис. I.

Характерной особенностью решений системы (2) и уравнения (7) является то, что в фурье-разложении солитона и других сильно-нелинейных волн могут присутствовать гармоники с большими значениями волнового вектора $\varkappa$, которые интенсивно затухают на тепловых частицах, а так как все гармоники решения согласованы по амплитудам и фазам, то затухать будет все решение, грея тепловые или почти тепловые частицы плазмы.

Поступила в редакцию
29 декабря 1978 г.

Литература

1. Л. И. Рудаков, В. Н. Цытович, Письма в ЖЭТФ, 25, 520 (1977).
2. Л. И. Рудаков, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 75, 1618 (1978).
3. А. А. Веряев, В. Н. Цытович, Препринт ФИАН № 186, М., 1978 г.