

О ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА КОГЕРЕНТНЫХ
ЭФФЕКТОВ В МНОГОУРОВНЕВЫХ СИСТЕМАХ

В. П. Карасев, Л. А. Шелепин

УДК 530.1:535.33

Даны простые формулы для вычисления матричных элементов конечных преобразований и полиномов от генераторов групп SU_n в обобщенных когерентных состояниях SU_n . Это существенно упрощает проведение расчетов эффектов сверхизлучения в многоуровневых системах.

I. В связи с получением когерентного излучения высокой мощности большое значение в настоящее время приобретают теоретические разработки, связанные с изучением когерентных состояний вещества и когерентного излучения /1/. Одним из мощных средств теоретического исследования различных эффектов когерентных кооперативных явлений (сверхизлучение, "фотонное эхо" и др.) является использование теоретико-групповых методов: модели Дике /2/ и ее обобщений /3-5/, а также обобщенных когерентных состояний (КС) /4,6/. В рамках этого направления к настоящему времени детально изучен случай когерентного излучения двухуровневых систем (классическая задача Дике). Так, в работе /7/ развит аппарат вычисления различных характеристик излучения с использованием когерентных состояний (КС) группы SU_2 ($\sim SO_3$) (блоковских волновых функций), являющихся сверхизлучательными состояниями. Сделаны определенные шаги по обобщению методики /7/ на случай многоуровневой задачи Дике, описываемой с помощью аппарата группы SU_n ($n > 2$). В частности, в работе /8/, используя довольно сложную технику функциональных эквивалентов, были найдены первые члены разложения по степеням $1/N$ корреляционных функций $\langle (c^+)^l c^l \rangle$ излучения n -уровневой системы в сверхизлучающих

состояниях, описываемых КС групп SU_n ; N - число излучателей, n - число уровней индивидуального излучателя, s^+ , s^- - операторы поля излучения. Однако общей простой техники вычисления основных характеристик излучения в многоуровневой задаче Дике до сих пор не было развито.

Ниже предлагается простая методика вычисления величин вида $\langle P; \{z_1\} | A_\alpha^k A_\beta^m | P; \{z_1^*\} \rangle$, являющихся основой вычисления многих характеристик когерентного излучения кооперативной n -уровневой системы /4,7/. Здесь $|P; \{z_1\}\rangle$ - волновая функция КС для неприводимых представлений (НП) $D(P)$ SU_n , A_α - генераторы группы SU_n .

2. Предлагаемая методика существенно образом использует введенное в /9/ согласно /6/ представление для КС $|P; \{z_1\}\rangle$ с помощью производящих инвариантов (ПИ) группы SU_n :

$$|P; \{z_1\}\rangle = N(P) \rho(\{z_1\}) \prod_{m=1}^{n-1} [x_1 \dots x_m z_1 \dots z_{n-m}]^{P_m}, \quad P = [P_1 \dots P_{n-1}],$$

$$\rho(\{z_1\}) = \left[\prod_{m=1}^{n-1} \begin{vmatrix} (z_1 z_1^*) & \dots & (z_1 z_m^*) \\ \dots & \dots & \dots \\ (z_m z_1^*) & \dots & (z_m z_m^*) \end{vmatrix}^{P_{n-m}} \right]^{-1/2}, \quad (z_k z_m^*) = \sum_{i=1}^n z_{ki} z_{mi}^*, \quad (I)$$

$$N(P) = \left[\prod_{m=1}^{n-1} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{i=m-k}^m P_i + k \right)^{P_m} \right]^{-1/2},$$

где $[x_1 \dots x_m z_1 \dots z_{n-m}] \equiv \sum_{i_1} \dots i_n x_{1i_1} \dots x_m i_m z_1 i_{m+1} \dots z_{n-m} i_n$ - определители; x_1 - векторы, определяющие пространство $L_P(x_1)$ НП $D(P)$; $z_1 = a^{-1} c_1$, $a \in SU_n$, c_1 - фиксированные комплексные векторы.

Используя представление (I), характер действия группы SU_n на векторы x_1 (векторы z_1 фиксированы) и свойства определителей, прямыми вычислениями получаем выражения для матричных элементов конечных преобразований $T_{ZZ}^P(u)$ в КС:

$$\begin{aligned} T_{ZZ}^P(\dots) &\equiv \langle P; Z | T(u) | P; Z' \rangle = \\ &= N^2(P) \rho(\{z_1\}) \rho(\{z_1'\}) \prod_{m=1}^{n-1} [\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m z_1^* \dots z_{n-m}^*]^{P_m} [u x_1 \dots u x_m z_1' \dots z_{n-m}']^{P_m} = \end{aligned}$$

ром $|P; \max\rangle$ НП $D(P)$, соответствующие выражения сильно упрощаются, так как в этом случае $(z_k z_n^*) = \delta_{kn}$. Например, для группы SU_3 имеем $(z_1 = a^{-1} e_{n-1})$:

$$\begin{aligned}
 \langle [p_1 p_2]_i Z | A_\alpha A_\beta | [p_1 p_2]_i Z \rangle &= p_2 (p_2 - 1) (A_\beta z_1 z_1^*) (A_\alpha z_1 z_1^*) + \\
 &+ p_1 (p_1 - 1) \{ (A_\beta z_1 z_1^*) + (A_\beta z_2 z_2^*) \} \{ (A_\alpha z_1 z_1^*) + (A_\alpha z_2 z_2^*) \} + \\
 &+ p_1 p_2 \{ 2 (A_\beta z_1 z_1^*) (A_\alpha z_1 z_1^*) + (A_\alpha z_1 z_1^*) (A_\beta z_2 z_2^*) + (A_\beta z_1 z_1^*) (A_\alpha z_2 z_2^*) \} + \\
 &+ (p_1 + p_2) (A_\beta A_\alpha z_1 z_1^*) + p_1 \left[\left| \begin{array}{c} (A_\beta z_1 z_1^*) (A_\beta z_1 z_2^*) \\ (A_\alpha z_2 z_1^*) (A_\alpha z_2 z_2^*) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} (A_\alpha z_1 z_1^*) (A_\alpha z_1 z_2^*) \\ (A_\beta z_2 z_1^*) (A_\beta z_2 z_2^*) \end{array} \right| \right] + \\
 &+ (A_\beta A_\alpha z_2 z_2^*) \}. \tag{5}
 \end{aligned}$$

3. Данная методика может эффективно применяться при вычислении важнейших характеристик излучения в многоуровневой задаче Дике и ее обобщениях [3,4,8]: интенсивностей, корреляционных функций и т.д., поскольку они выражаются полиномами от генераторов A_α группы SU_n . В частности, в соответствии с [7], формула (5) при $A_\alpha = A_\beta^+, c_1 = e_{n-1}$ может быть непосредственно использована для анализа эффектов сверхизлучения трехуровневой системы из КС (I) во все возможные ее стационарные состояния. В этом плане представляет несомненный интерес применение полученных результатов к обобщению данной в [7] для двухуровневых систем методики на случай изучения когерентных эффектов в многоуровневых излучательных системах. При этом могут оказаться полезными результаты работы [10] по алгебре ЛН SU_n . Отметим также возможность использования результатов данной работы для анализа других аспектов динамических SU_n -симметрий (ср. с [6]), а также их обобщения на случай других классических групп симметрий.

Поступила в редакцию
II января 1979 г.

Л и т е р а т у р а

1. Л. А. Шелепин, Труды ФИАН, 87, 3 (1976).
2. R. H. Dicke, Phys. Rev., 93, 99 (1954).
3. Л. А. Шелепин, ЖЭТФ, 54, 1963 (1968).
4. Т. М. Махвиладзе, Л. А. Шелепин, Труды ФИАН, 70, 120 (1973).
5. Э. Ш. Теплицкий, ТМФ, 2, 399 (1970).
6. А. М. Переломов, УФН, 123, 23 (1977).
7. F. T. Arecchi, E. Courteus, R. Gilmore, H. Thomas, Phys.Rev., A6, 2211 (1972).
8. В. В. Зверев, ТМФ, 22, 401 (1976).
9. В. П. Карасев, Л. А. Шелепин, Краткие сообщения по физике ФИАН № 6, 14 (1978).
10. В. П. Карасев, П. П. Карасев, В. А. Санько, Л. А. Шелепин, Труды ФИАН, 106, 119 (1978).