

УДК 523.11

## ВЛИЯНИЕ ГАЛО ТЕМНОЙ МАТЕРИИ НА РОСТ СВЕРХМАССИВНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ В ЦЕНТРЕ ГАЛАКТИКИ

Е. А. Васильев, М. И. Зельников

*Исследуется влияние темной материи на рост сверхмассивных черных дыр в центрах галактик (прежде всего, Млечного Пути). Показано, что гравитационное рассеяние частиц темной материи на звездах ядра галактики (балджа) приводит к диффузии темной материи в фазовом пространстве  $\{m, m_z, I\}$ . Получено соответствующее уравнение диффузии для функции распределения и вычислены его коэффициенты для различных моделей балджа. Показано, что преобладающим эффектом является диффузия по моменту импульса  $m$ , которая приводит к значительному потоку частиц в черную дыру. Установлен закон роста черной дыры  $M_{bh} \sim t^{9/16}$  за счет поглощения темной материи и показано, что этот процесс может дать объяснение наблюдаемым массам черных дыр. Рассмотрены поправки, связанные с областью гравитационного влияния черной дыры и диффузией темной материи по адиабатическому инварианту  $I$ , и сделан вывод, что в большинстве случаев они практически не отражаются на законе роста.*

1. Вопрос о взаимодействии центральной сверхмассивной черной дыры (ЧД) в центре галактики и гигантского гало темной материи уже исследовался в ряде работ (см. [1, 2, 3]). Предметом внимания этих работ выступала эволюция гало темной материи (ТМ) под влиянием формирующейся в центре галактики ЧД. Как варианты начального распределения плотности темного вещества в гало рассматривались: самоподобный

(степенной) профиль  $\rho \sim r^{-\alpha}$  ( $0 < \alpha < 2$ ), изотермический профиль  $\rho \sim r^{-2}$  и профиль Наварро–Фрэнк–Уайта (NFW)  $\rho \sim \frac{\delta_c}{r/r_s(1+r/r_s)^2}$  [4]. В работе [1] эволюция гало определялась методом адиабатического инварианта, который применим для определения малых изменений параметров движения частицы за орбитальный период, когда рост ЧД и соответствующее изменение гравитационного потенциала происходит адиабатически медленно.

Однако пренебрежение поглощением частиц черной дырой, а также предположение о равномерности и постоянстве их распределения по моменту, привело в этой работе к переоценке потока тёмного вещества на ЧД.

Более точный подход был использован в работах [5, 6], где учитывался не только рост черной дыры за счет поглощения падающего вещества, но и соответствующее изменение функции распределения частиц ТМ как из-за их поглощения, так и из-за изменения гравитационного поля ЧД. Оказалось, однако, что учет только перечисленных выше факторов приводит к заключению, что при нынешнем значении массы ЧД в Галактике  $M_{bh} = 2.9 \cdot 10^6 M_{\odot}$  ( $M_{\odot}$  – масса Солнца) попавшая в нее ТМ составляет лишь малую долю этой массы.

В работе [7] было выдвинуто предположение, что гравитационное рассеяние частиц ТМ звездами ядра галактики может существенно увеличить массу поглощенного темного вещества. Этот эффект приводит к диффузии ТМ в фазовом пространстве  $\{m, m_z, I\}$  по моменту импульса  $m$  и, как было показано в этой работе, дает правильный порядок массы черных дыр, наблюдаемых в центрах галактик, а также позволяет установить закон роста этих ЧД.

Развивая вышеизложенный подход, в настоящей работе мы исследуем влияние на рост центральной ЧД следующих трех факторов, остававшихся до сих пор без должного внимания:

- динамики ТМ в области гравитационного влияния ЧД;
- изменения концентрации звезд в этой области;
- диффузии частиц ТМ по адиабатическому инварианту  $I$ , вызванной рассеянием на звездах.

В работе вычислены коэффициенты диффузии внутри и вне зоны гравитационного влияния ЧД по всем фазовым переменным (вблизи порога поглощения ЧД), необходимые для последующего изучения двумерной диффузии ТМ. Произведены оценки, показывающие, что в большинстве случаев перечисленные факторы незначительно скажутся на общем законе роста массы ЧД.

1.1. *Темная материя в галактике.* Как показывают наблюдения, большую часть массы во Вселенной составляет темная материя, значительная доля которой представляет собой нерелятивистские частицы, взаимодействующие только гравитационно [8]. Поэтому в газе частиц ТМ отсутствует давление, диссипация и, в общем случае, отсутствует термодинамическое равновесие. Исследование динамики такого вещества методом кинетического уравнения показывает, что в результате роста первоначальных возмущений в распределении материи образуются сферически-симметричные образования – бездиссипативные гравитационные сингулярности (БГС) различных масштабов, имеющие, однако, сходную структуру. Согласно общей аналитической теории, разработанной А.В. Гуревичем и К.П. Зыбиным [9] и подтвержденной численными экспериментами [10], такие объекты имеют одинаковый профиль плотности

$$\rho(r) = Ar^{-\xi}, \quad \xi = 12/7. \quad (1)$$

Из-за того, что первоначальное возмущение в общем случае не является сферически-симметричным, частицы образовавшейся БГС будут обладать моментом (при этом суммарный момент системы остается равным нулю). После сильного сжатия на нелинейной стадии момент, приобретенный частицами, будет небольшим. Он оказывается жестко связанным с их радиальным действием следующим соотношением:  $m^2 = l_0^2 I^2$ , где  $I = \frac{1}{\pi} \int_{r_{min}}^{r_{max}} v_r(r) dr$ , малый параметр  $l_0 \simeq 0.1$  определяется асимметрией начальной неоднородности плотности. Функция распределения частиц темной материи, записанная в переменных  $I, m, m_z$ , имеет следующий вид [9]:

$$f(I, m, m_z) = f_0 I^{1/8} \delta(m^2 - l_0^2 I^2). \quad (2)$$

В дальнейшем, после образования БГС галактических масштабов, происходит образование самой галактики в результате концентрации барионного вещества к центру потенциальной ямы, его остывания и формирования галактической структуры – балджа, диска и гало. При этом полный гравитационный потенциал перестает определяться темной материей; наоборот, в центральных областях основной вклад в него на этой стадии вносит барионное вещество. В целом процесс образования галактики происходит адиабатически, т.е. достаточно медленно по сравнению с динамическим временем осцилляций частиц темной материи в общем потенциале. В этих условиях радиальное действие является адиабатическим инвариантом (в дальнейшем будем его так и называть).

$$I(E, m) = \frac{1}{\pi} \int_{r_-}^{r_+} dr \sqrt{2(E - \Psi(r)) - \frac{m^2}{r^2}}, \quad (3)$$

где  $E$  – энергия частицы,  $\Psi(r)$  – гравитационный потенциал,  $r_-$ ,  $r_+$  – точки поворота, которые определяются обращением в ноль подкоренного выражения; в силу малости момента справедливо  $r_- \ll r_+$ .

Нас интересует центральная область галактики – балдж, который мы будем считать приближенно сферически-симметричным. В этом случае полный момент частиц тоже сохраняется, и, следовательно, функция распределения частиц, записанная в переменных  $I$ ,  $m$ ,  $m_z$ , не изменяет свой вид. В предположении, что плотность и гравитационный потенциал балджа имеют степенную зависимость от  $r$ , можно показать, что профиль плотности темной материи будет также степенным [5].

Гало темной материи нашей Галактики по оценкам [9] имеет массу  $M_H \sim 10^{12} M_\odot$  и радиус  $R_H \sim 100 \text{ Кпс}$ . Численное значение коэффициента  $f_0$  из формулы (2) для нашей Галактики составляет

$$f_0 = 6 \cdot 10^8 z \left( \frac{cM^2}{c} \right)^{-9/8}. \quad (4)$$

Если оценить количество темной материи в пределах балджа, то окажется, что при сделанных предположениях на момент образования галактической структуры масса темной материи в пределах балджа была сравнима с массой барионной компоненты. Аналогичное соотношение справедливо и для области влияния черной дыры (т.е. "центрального парсека").

По-видимому, в настоящее время количество темной материи в балдже, и тем более в его центральной части, меньше количества барионной материи благодаря процессам диффузии и поглощения, о которых речь пойдет ниже. Это означает, что используемое нами в дальнейшем пренебрежение вкладом темного вещества в суммарный гравитационный потенциал является оправданным.

**1.2. Структура и параметры балджа.** Будем считать, что центральная область галактики, называемая балджем, имеет сферически-симметричную форму, размер порядка  $1 \text{ Кпс}$  и массу порядка  $10^{10} M_\odot$  [11]. Профиль плотности выводится из зависимости дисперсии скоростей звезд от радиуса и может быть аппроксимирован степенной зависимостью  $n(r) \sim r^{-(2-\alpha)}$ . При этом для изотермического балджа, т.е. с независимой от



радиуса дисперсией скоростей  $\sigma^2$ , показатель степени равен  $-2$ . Для нашей Галактики можно принять  $\sigma \sim r^{1/4}$  при  $r \leq 50 \text{ пс}$  [12], что соответствует  $\alpha = 0.5$ .

Следует отметить, что современные измерения не позволяют получить профиль скоростей для удаленных галактик с разрешением лучше  $\sim 100 \text{ пс}$ . В дальнейших расчетах мы будем приближенно считать дисперсию скоростей в них постоянной, а балдж – изотермическим. Это предположение, однако, слабо сказывается на конечном значении массы ЧД.

В центре балджа обычно находится компактный объект; в настоящее время принято считать, что балдж содержит сверхмассивную черную дыру [13]. Для нашей Галактики считается доказанным, что центральный компактный объект Sgr A\* является сверхмассивной черной дырой с массой  $M_{bh} \simeq 2.9 \cdot 10^6 M_\odot$  [14]. Звездное скопление вокруг нее имеет профиль плотности

$$n(r) = n_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-3/2}, \quad \text{где } n_0 = 10^8 \frac{1}{\text{пс}^3}, \quad r_0 = 0.02 \text{ пс} \quad [15]. \quad (5)$$

Примем для упрощения вычислений массы всех звезд одинаковыми и равными  $M_s$ . Определим радиус гравитационного влияния черной дыры  $R_0$  таким образом, что масса звезд внутри этого радиуса сравнивается с массой черной дыры. В нашей Галактике в настоящее время  $R_0 \simeq 1 \text{ пс}$ . Будем считать, что в центральной области  $r \leq R_0$  основной вклад в гравитационный потенциал вносит черная дыра, а вне ее – звезды балджа с указанным выше профилем плотности.

Отметим, что эволюция черной дыры и балджа приводит к изменению значений  $n_0$  и  $R_0$ . Легко показать, что связь между  $M_{bh}$  и  $R_0$  дается соотношением

$$M_{bh} = \frac{8\pi}{3} M_s \tilde{\eta}_b R_0^{1+\alpha}, \quad (6)$$

где  $\tilde{\eta}_b$  – параметр балджа:  $n_b(r) = \tilde{\eta}_b r^{-2+\alpha}$ .

## 2. Постановка задачи. Кинетическое уравнение

Наша конечная задача заключается в том, чтобы определить, какую долю массы центральной черной дыры  $M_{bh}$  может составлять темное вещество, и установить закон роста черной дыры за счет поглощения темной материи. Прежде всего отметим, что прямое падение в ЧД частиц темной материи с моментами, меньшими  $m_g = \frac{4GM_{bh}}{c}$

(нерелятивистский порог поглощения ЧД), не приводит к существенному росту черной дыры, т.к. если, используя (2), (4), оценить массу таких частиц при современном значении  $m_g$ , то окажется, что она на два-три порядка меньше  $M_{bh}$  [6].

Простейшим процессом, приводящим к изменению первоначальной функции распределения, является гравитационное рассеяние частиц темной материи на звездах, по форме взаимодействия тождественное кулоновскому.

Функция распределения частиц темной материи удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \{H_0, f\} = St\{f\}. \quad (7)$$

$H_0$  – функция Гамильтона для движения в данном гравитационном потенциале,  $\{, \}$  – скобки Пуассона,  $St\{f\}$  – столкновительный член, который может быть записан в форме Ландау [16]. Поскольку частота соударений со звездами много меньше частоты их орбитального движения, то можно перейти к каноническим переменным действие-угол  $\{I_k, \phi_k\}$ ;  $\{I_k\} = \{I, m, m_z\}$  и переписать уравнение в усредненном за период виде:

$$\frac{\partial f(\{I_k\}, t)}{\partial t} = St\{f\}. \quad (8)$$

Тогда выражение для столкновительного члена принимает следующий вид:

$$St\{f\} = \frac{\partial}{\partial I_k} \left[ R_{kl} \frac{\partial f}{\partial I_l} \right], \quad (9)$$

где величины  $R_{kl}$  являются коэффициентами диффузии.

Можно показать [1, 5], что для степенного потенциала адиабат-инвариант можно приближённо (с ошибкой менее 8%) представить в виде:

$$I(E, m) \approx J(E) - b_\alpha m. \quad (10)$$

При этом константа  $b_\alpha = 1$  в случае кулоновского ( $\alpha = -1$ ) и осцилляторного ( $\alpha = 2$ ) потенциалов, а в случае изотермического или близкого к нему потенциала  $b_\alpha \approx 0.6$ .

Оказывается удобным перейти от переменных  $\{I, m, m_z\}$  к  $\{J, m, m_z\}$  с помощью линейного преобразования (10), при этом в силу малости коэффициента  $l_0$ , начальная функция распределения (2) в новых переменных примет такой же вид:

$$f_i(J, m) = f_0 J^{1/8} \delta(m^2 - l_0^2 J^2). \quad (11)$$

Поскольку начальная функция распределения не зависит от  $m_z$ , то и решение уравнения (8) будем искать в виде  $f(J, m, t)$ , а выражение (9) перепишем в виде:

$$St\{f\} = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial m} m \left( R_{22} \frac{\partial f}{\partial m} + R_{12} \frac{\partial f}{\partial J} \right) + \frac{\partial}{\partial J} \left( R_{12} \frac{\partial f}{\partial m} + R_{11} \frac{\partial f}{\partial J} \right). \quad (12)$$

Далее, некоторые наблюдения свидетельствуют в пользу того, что функцию распределения звезд можно считать изотропной, т.е. зависящей только от энергии, но не от момента, в том числе и в центральных областях [17]. Формулы для вычисления коэффициентов диффузии  $R_{kl}$  в случае изотропной функции распределения звезд получены в [7].

Чтобы приступить к решению диффузионного уравнения (8), (12), прежде всего необходимо задать функцию распределения звезд.

Предположим, что плотность числа звезд в балдже изменяется степенным образом:  $n(r) = n_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma}$ , причем потенциал тоже имеет степенной вид  $\Psi(r) = \Psi_0 r^\alpha$ . В этом случае изотропную функцию распределения звезд можно представить также в виде степенной зависимости от энергии [18]:

$$f'(v', r) = F_0 E^{-\beta}, \quad E = \frac{v'^2}{2} + \Psi(r), \quad \gamma = \left(\beta - \frac{3}{2}\right) \alpha. \quad (13)$$

Нас будут интересовать два случая: во-первых, самосогласованный потенциал, создаваемый звездами в балдже (из наблюдений известно, что профиль плотности звезд можно считать степенным с показателем степени  $\gamma$ , близким к 2 [19]), и во-вторых, кулоновский потенциал в области гравитационного влияния черной дыры.

В первом случае для самосогласованного потенциала справедливо соотношение

$$\Psi = \Psi_0 r^\alpha,$$

$\sigma^2 = \sigma_0^2 r^\alpha$  – дисперсия скоростей,

$$\beta = \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2}, \quad \gamma = 2 - \alpha. \quad (14)$$

В пределе  $\alpha \rightarrow 0$  мы получаем изотермическое звездное скопление:  $f'(E) = F_0 \exp\left(-\frac{E}{\sigma_0^2}\right)$ ,  $\sigma_0^2$  – постоянная дисперсия скоростей.

Во втором случае  $\Psi(r) = -\frac{GM_{bh}}{r}$ ; ограничимся случаем  $\gamma = -3/2$ , следующим из наблюдений [15]. Тогда функция распределения звезд не зависит от энергии и равна  $F_0$  при  $E < 0$ , где  $F_0$  – соответствующая постоянная балджа.

### 3. Коэффициенты диффузии

Рассмотрим два предельных случая: для частиц темной материи, у которых  $r_+(J) < R_0$  ( $R_0$  – граница области гравитационного влияния черной дыры (6)), будем вычислять коэффициенты по формулам для кулоновского потенциала черной дыры, а для остальных используем выражения для самосогласованного потенциала и распределения звезд в балдже, считая, что большую часть орбитального периода эти частицы проводят вне зоны влияния черной дыры.

Опуская для краткости промежуточные вычисления, приводим полученные коэффициенты диффузии для этих двух случаев.

Для случая балджа коэффициент диффузии по моменту  $m$

$$R_{22} \approx 0.46GM_s L_c \sigma_0^{\frac{1+\alpha/2}{2}} J^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}. \quad (15)$$

Этот результат в точности совпадает с формулой, полученной в работе [7]. Отметим, что  $R_{22}$  не зависит от  $m$  и слабо зависит от  $J$ , причем в изотермическом случае не зависит вовсе. Коэффициент диффузии по  $J$  оказывается равным

$$R_{11} \approx R_{22} \cdot 0.1 \left(\frac{J}{m}\right)^{1-2\alpha}. \quad (16)$$

$R_{11}$  возрастает с уменьшением момента, однако далее будет показано, что этот рост в действительности ограничен.

Что касается коэффициента  $R_{12}$ , то его можно представить как  $R_{22} \cdot K_\alpha\left(\frac{m}{J}\right)$ , где  $K_\alpha(\mu) \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Поэтому при малых моментах членом с  $R_{12}$  в (12) можно пренебречь.

Для случая центральной области аналогичным образом получаем

$$R_{22} = 2.4G^{1/2}M_s M_{bh}^{-1/2} R_0^{-3/2} L_c J^2. \quad (17)$$

Сравнивая с выражением (15), убеждаемся, что при  $J = J/(R_0)$  (на границе области гравитационного влияния черной дыры) коэффициенты диффузии совпадают, то есть формулы для двух предельных случаев хорошо согласуются друг с другом. Далее, для диффузии по  $J$  имеем:

$$R_{11} = R_{22} \cdot 0.25 \frac{J}{m}. \quad (18)$$



Аналогично предыдущему случаю устанавливаем, что  $R_{12} \simeq \text{const} R_{22} \frac{m}{J}$ , т.е. не представляет интереса при малых  $m$ .

**3.1. Коэффициенты диффузии для уточненного распределения звезд.** До сих пор при вычислении коэффициентов диффузии мы пренебрегали тем, что плотность звезд вблизи черной дыры может существенно отличаться от общего степенного профиля. Между тем, основное влияние на коэффициент  $R_{11}$  оказывают звезды в периферии орбиты частицы темной материи, т.е. для частиц с малыми моментами – наиболее близкие к черной дыре звезды. Попробуем выяснить связанные с этим поправки в коэффициент  $R_{11}$ .

Для начала рассмотрим область кулоновского потенциала. Из наблюдений [14] известно, что ближайшая к черной дыре звезда имеет характерный размер орбиты порядка  $1000 \text{ АЕ}$  или  $3 \cdot 10^{-4} \text{ пс}$ . Между тем, согласно (5), внутри сферы данного радиуса мы должны были бы наблюдать около 15 звезд.

Для учета этой несогласованности примем, что функция распределения звезд по энергиям обращается в нуль для  $E < E_{cr} = -\frac{GM_{bh}}{r_{cr}}$ . Из сопоставления с наблюдениями получаем значение  $r_{cr} \simeq 5 \cdot 10^{-3} \text{ пс} \sim 10^4 r_g$ , где  $r_g$  – гравитационный радиус ЧД.

Модифицированный коэффициент диффузии  $R'_{11} \simeq R_{11} \cdot 3 \sqrt{\frac{r_-}{r_{cr}}}$  при  $r_- < r_{cr}$ . Для значений  $r_+ < 1 \text{ пс}$ ,  $\mu = \frac{m}{J} \leq 0.1$ , справедливо  $r_- < r_{cr}$ , так что во всей интересующей нас области коэффициент  $R_{11}$  оказывается существенно меньше, чем вычисленный по формуле (18). Можно показать, что если рассматривать эту поправку для звезд вне центральной области, принимая значение  $r_{cr} \sim 10^2 - 10^3 r_g$ , как следует из наблюдений, то  $R_{11}$  возрастает с уменьшением момента вплоть до  $m = 10^2 - 10^3 m_g$ , а затем выходит на постоянный предел. В то же время на  $R_{22}$  это обрезание практически не отражается.

**3.2. Скорость диффузии.** Нетрудно показать, что для уравнения  $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  характерным "временем релаксации" на пространственном масштабе  $l$  является  $\tau \sim \frac{l^2}{8A}$ . Пользуясь этим, сделаем некоторые оценки, касающиеся уравнения (8) с коэффициентами (15), (16), вычисленными для балджа.

Время диффузии по моментам  $\tau_2 = \frac{(l_0 J_0)^2}{8R_{22}} \sim 10^6 \left( \frac{r_+}{1 \text{ пс}} \right)^2$  лет, т.е. времени существования Галактики соответствует область  $r \leq 100 \text{ пс}$  (ниже мы уточним эту оценку). Коэффициент  $R_{11}$  возрастает с уменьшением  $m$ ; при минимальном моменте  $m = m_g$  характерное время диффузии по  $J$  составляет  $\tau_1 \sim 3 \cdot 10^6 \frac{r_+}{1 \text{ пс}}$  лет, то есть для  $r_+ \sim 100 \text{ пс}$   $\tau_1$  намного меньше возраста Галактики. Однако при моментах, уже хотя бы на порядок

превышающих  $m_g$ , диффузия по  $J$  не вносит существенных искажений в одномерную диффузию по  $m$ . В предыдущем параграфе было показано, что учет обрезания профиля плотности звезд при  $r \rightarrow 0$  приводит к тому, что  $R_{11}$  с уменьшением  $m$  стремится к конечному пределу, то есть  $\tau_1$  становится сравнимым с  $\tau_2$  либо превосходит его для всех значений  $r_+ \leq 100$  пс. Таким образом, в первом приближении диффузией по  $J$  можно пренебречь по сравнению с диффузией по  $m$ , по крайней мере для не слишком малых значений  $m$ .

Что же касается характерного времени диффузии по моментам для центральной области, то из-за того, что  $R_{22} \sim J^2 = l_0^2 m^2$ , характерное время не зависит от начального значения момента и составляет  $\tau_2 = 10^6$  лет  $\times \left(\frac{M_{bh}}{3 \cdot 10^6 M_\odot}\right)^2$ .

#### 4. Поглощение темной материи и рост черной дыры

4.1. *Приближение одномерной диффузии.* В предыдущих разделах было показано, что коэффициент  $R_{22}$  в балдже не зависит от  $m$ , коэффициент  $R_{11} \sim R_{22} \left(\frac{J}{m}\right)^\epsilon$ ,  $\epsilon \leq 1$ , а  $R_{12} \sim R_{22} \frac{m}{J}$ . Поскольку в начальный момент  $m = l_0 J \ll J$ , а нас интересует поведение функции  $f$  при малых  $m$ , то в (12) можно пренебречь членом с  $R_{12}$ . Далее, из тех же соображений следует, что  $\frac{\partial f}{\partial J} \sim l_0 \frac{\partial f}{\partial m}$  в начальный момент, а поскольку при  $m = l_0 J$  справедливо  $R_{11} \sim R_{22}$ , то  $R_{11} \partial f / \partial J \ll R_{22} \partial f / \partial m$  при не слишком малых значениях  $m$ . Кроме того, как было показано выше,  $R_{11}$  в действительности ограничен при  $m \rightarrow 0$ . Наконец, при  $m = m_g$  имеем  $f(m, J, t) = 0$ , поэтому  $\left.\frac{\partial f}{\partial J}\right|_{m=m_g} = 0$ , и, таким образом, величина  $R_{11} \frac{\partial f}{\partial J}$  ограничена при  $m \rightarrow 0$ .

Суммируя все сказанное, можно в первом приближении пренебречь в выражении (12) всеми членами, кроме первого, и записать кинетическое уравнение (8) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{m} R(J) \frac{\partial}{\partial m} \left( m \frac{\partial f}{\partial m} \right) \quad (19)$$

с граничными условиями

$$f|_{m=m_g} = 0, \quad m \frac{\partial f}{\partial m} \Big|_{m=\infty} = 0, \quad (20)$$

начальными условиями (4) и коэффициентом диффузии (15), вычисленным для балджа (влияние центральной области и уменьшение коэффициента диффузии в ней будет обсуждаться ниже).

Поток темной материи через границу  $m = m_g$  дается выражением

$$S(t) = 16\pi^3 \int dJ f_0 J^{1/8} S_J(t), \quad (21)$$

где  $S_J(t) = m_g R \frac{\partial f}{\partial m}$  – поток через границу  $m = m_g$  для уравнения (19) с начальным условием

$$f(m, t = 0) = \delta(m^2 - m_0^2), \quad m_0 = l_0 J. \quad (22)$$

4.2. Поток в одномерной задаче. Рассмотрим вспомогательную задачу: уравнение (19) с граничными условиями (20) и начальным условием (22) и найдем для него поток  $S_J(t) = m_g R \frac{\partial f}{\partial m}$ .

Решение уравнения (19) представляется в виде

$$f(m, t) = \int_0^\infty dm' G(m, m', t) f(m', 0), \quad (23)$$

где

$$G = \int_0^\infty d\lambda m' \exp(-\lambda Rt) Z_\lambda(m, m_g) Z_\lambda(m', m_g)$$

– функция Грина,

$$Z_\lambda(m, m_g) = \frac{J_0(\sqrt{\lambda} m_g) Y_0(\sqrt{\lambda} m) - J_0(\sqrt{\lambda} m) Y_0(\sqrt{\lambda} m_g)}{(J_0^2(\sqrt{\lambda} m_g) + Y_0^2(\sqrt{\lambda} m_g))^{1/2}}$$

– ортонормированная система собственных функций граничной задачи (20),  $J_0, Y_0$  – функции Бесселя 1-го и 2-го рода нулевого порядка.

С учетом начальных условий (22)  $f(m, t) = \frac{1}{2m_0} G(m, m_0, t)$ .

Можно показать, что поток  $S_J(t) \sim \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{m_0^2}{\zeta Rt}\right)$ ,  $\zeta \approx 5$ . Чтобы найти более точный вид зависимости, воспользуемся следующим рассуждением.

Поток  $S_J(t, m) = m R \frac{\partial f}{\partial m}$  непрерывен по  $m$ ; более того, в области  $m_g < m < m_0$  можно считать этот поток почти независимым от  $m$  (это справедливо, начиная с некоторого момента времени  $t$ , когда ширина "пика" функции  $f(m)$  станет порядка  $m_0$ , см. рис. 1). Обозначим  $\kappa(t) = \left. \frac{\partial f(m, t)}{\partial m} \right|_{m=m_g}$ , тогда

$$S_J(t) = m_g R \kappa(t), \quad f(m, t) = \int_{m_g}^m \frac{S_J}{R m'} \partial m' = m_g \kappa(t) \ln \frac{m}{m_g}. \quad (24)$$

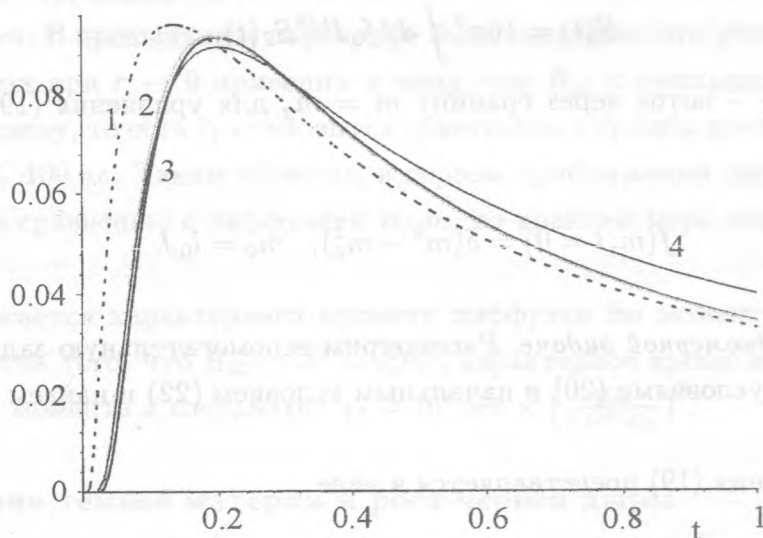


Рис. 1. Нормированные значения  $f(m,t)/\ln(m/m_g)$  для различных  $m$  (24): 1)  $m = m_0/2$ , 2)  $m = 20m_g$ , 3)  $m = 1.2m_g$ , 4) теоретическая оценка для потока  $\kappa(t)$  по формуле (25) при  $m_0 = 100m_g$ . Видно, что профиль зависимости от времени практически одинаков, максимальные значения, нормированные на  $\ln(m/m_g)$ , совпадают, хотя и достигаются в разные моменты времени, соответствующие приходу в точку начального возмущения. Теоретическая кривая является хорошим приближением для потока при его максимальном значении, а при больших временах несколько переоценивает поток.

Согласно сказанному выше,  $\kappa(t) \approx \frac{\Xi}{t} \exp\left(-\frac{m_0^2}{5Rt}\right)$ ,  $\Xi$  – некоторая константа.  $\kappa(t)$  имеет максимум при аргументе экспоненты, равном  $-1$ ; значение  $K_{max} = \frac{\Xi 5R}{em_0^2}$ . Если для определения значения  $\Xi$  мы применим формулу (24) при  $m = m_0/2$ , то учитывая, что  $f_{max}(m_0/2) = \frac{\ln 2}{2m_0^2}$ , получим значение  $\Xi = \frac{e \ln 2}{10m_g R \ln \frac{m_0}{2m_g}}$ . Окончательно поток  $S_J$  оказывается равным:

$$S_J(t) = \frac{e \ln 2}{10 \ln \frac{m_0}{2m_g}} \cdot \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{m_0^2}{5R(J)t}\right). \quad (25)$$

Применимость проведенного рассуждения подтверждается хорошим соответствием формулы (25) с проведенным нами численным интегрированием задачи (рис. 1).

4.3. Закон роста черной дыры. В первом приближении пренебрежем тем, что в области кулоновского потенциала вблизи черной дыры коэффициент  $R(J)$  описывается фор-



мулой (17). Представим его для всего диапазона  $J$  согласно (15) в виде  $R(J) = R_\epsilon J^\epsilon$ ,  $\epsilon = \frac{\alpha}{2+\alpha} \leq 0.2$ . Подставляя полученное выражение для  $S_J(t)$  в формулу для общего потока (21), перепишем ее в виде

$$S(t) = \int_0^\infty dJ f_0 J^{1/8} \frac{0.18}{\ln \frac{l_0 J}{2m_g}} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{l_0^2 J^{2-\epsilon}}{5R_\epsilon t}\right). \quad (26)$$

Логарифм под интегралом слабо меняется, поэтому будем считать его значение приближенно постоянным и равным 10. Тогда получаем

$$S(t) = 8.9 f_0 H_\epsilon \frac{R_\epsilon^{\frac{9}{8(2-\epsilon)}}}{t^{1-\frac{9}{8(2-\epsilon)}}}, \quad H_\epsilon = \left(\frac{5}{l_0^2}\right)^{\frac{9}{8(2-\epsilon)}} \frac{\Gamma\left(\frac{9}{8(2-\epsilon)}\right)}{2-\epsilon}. \quad (27)$$

Если считать, что рост черной дыры определяется исключительно поглощением темного вещества, то получаем следующую зависимость массы черной дыры от времени (принимая массу затравочной дыры малой):

$$M_{bh}(t) = B(R_\epsilon t)^{\frac{9}{8(2-\epsilon)}}, \quad B = 8.9 f_0 H_\epsilon \frac{8(2-\epsilon)}{9}. \quad (28)$$

Отметим, что если пользоваться более точным выражением для  $S_J(t)$  при больших  $t$ , то коэффициент  $B$  понижается приблизительно в 1.2 раза.

Таким образом, рост черной дыры имеет степенной характер с показателем степени около 9/16. Это в целом согласуется с результатами работы [7], хотя показатель степени оказывается несколько меньшим.

**4.4. Влияние области кулоновского потенциала на рост черной дыры.** Поскольку коэффициент диффузии в области влияния черной дыры (17) меньше, чем в балдже (15), можно было бы предположить, что диффузия этой области происходит медленнее, и это замедляет рост массы черной дыры. В действительности это не совсем так. Согласно сделанным в конце п. 3.2 оценкам, характерное время диффузии  $\tau \sim M_{bh}^2$  и в настоящее время составляет  $10^6$  лет, а значит, раньше оно было еще меньше. Кроме того, из (25) видно, что максимум потока приходит из области  $J_{max} \leq \sqrt{5Rt/l_0^2}$ , что на нынешний момент соответствует области  $r \leq 100$  пс, тогда как  $J_0$  соответствует  $r \simeq 1$  пс. Зависимость от времени у этих величин также практически одинаковая,  $J_{max} \sim t^{1/2}$ ,  $J_0 \sim M_{bh}(t) \sim t^{9/16}$ , то есть соотношение  $J_0 \ll J_{max}$  сохранялось и в прошлом.

Нетрудно показать, что для изменяющегося во времени коэффициента  $R$  выражение для  $S_J(t)$  изменится следующим образом:

$$S_J(t) = \frac{e \ln 2}{10 \ln \frac{m_0}{2m_g}} \cdot \frac{R(t)}{\int_0^t R(t') dt'} \exp \left( - \frac{l_0^2 J^2}{5 \int_0^t R(t') dt'} \right). \quad (25')$$

Поскольку же  $R(t)$  начинает уменьшаться при  $t > t_0(J) : J_0(t_0) = J$ , причем согласно сказанному выше  $t_0(J) \simeq 10^4 \frac{l_0^2 J^2}{(5R)} = 10^4 t_{max}(J)$ , где  $t_{max}(J)$  – время максимума потока, то это сказывается лишь на далеком "хвосте" функции  $S_J(t)$ , т.е. практически несущественно.

4.5. Влияние диффузии по  $J$  на рост черной дыры. Попробуем более точно оценить, насколько существенно влияние диффузии по  $J$ , т.е. насколько правомерным был переход к одномерной диффузии. Для этого по полученному приближенному решению (ограничимся случаем  $\alpha = 0$ , т.е.  $R_{22} = \text{const}$ ) найдем величину

$$\eta = \frac{\partial}{\partial J} \left( R_{11} \frac{\partial f}{\partial J} \right) = \frac{\partial}{\partial J} \left( R_{22} 0.1 \frac{J}{m} \frac{\partial}{\partial J} \left\{ \frac{e \ln 2}{10 \ln \frac{l_0 J}{2m_g}} \frac{\ln \frac{m}{m_g}}{R_{22} t} \exp \left[ - \frac{l_0^2 J^2}{5 R_{22} t} \right] \right\} \right).$$

Нас будет интересовать время  $t \sim t_{max}$ , соответствующее максимуму потока:  $t_{max} = \frac{l_0^2 J^2}{5R}$ . Оказывается, что  $\eta \sim t_{max} - t$ :

$$\eta = \frac{\ln 2}{5 \ln \frac{l_0 J}{2m_g}} \frac{R_{22} \ln \frac{m}{m_g}}{l_0^2 J^3 m} \left( 1 - \frac{t}{t_{max}} \right). \quad (29)$$

Теперь надо сравнить  $\eta$  с членом  $\eta_m = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial m} (m R_{22} \frac{\partial f}{\partial m})$ . Однако нетрудно убедиться, что при подстановке (24) этот член тождественно обращается в нуль, поскольку приближенное решение не удовлетворяет исходному уравнению во всей области  $m > m_g$ . Поэтому сравним  $\eta$  с величиной  $\eta_m = \frac{\partial f}{\partial t}$ :

$$\eta_m = \frac{5 \ln 2}{2 \ln \frac{l_0 J}{2m_g}} \frac{R_{22} \ln \frac{m}{m_g}}{l_0^4 J^4} \left( 1 - \frac{t}{t_{max}} \right). \quad (30)$$

Сопоставляя с (29), находим  $\frac{\eta}{\eta_m} = \frac{2 l_0^2 J}{25 m}$ .

Для  $J(r_+ = 100 \text{ nc})$ ,  $m = m_g$  это отношение составляет  $\approx 30$ . Как было указано в конце п. 3.1, для оценки максимального значения  $R_{11}$  вместо  $m_g$  следует брать величину порядка  $10^2 m_g$ , то есть это отношение станет порядка единицы. Необходимо, однако, отметить, что все приведенные в этом параграфе оценки остаются весьма

приближенными, поскольку для точных оценок необходимо использовать точное решение уравнения одномерной диффузии, тогда как метод п. 4.2 дает только правильное выражение для общего потока через  $m = m_g$ , но не дает решения уравнения при всех  $m$ .

Проблемой данного метода пока остается ограниченная применимость перехода к одномерной диффузии при приближении  $m$  к границе поглощения  $m_g$ . Впрочем, учет двумерной диффузии в этой области вряд ли существенно изменит величину потока через  $m = m_g$ , так как диффузия по  $J$  приводит к "размыванию" функции распределения вдоль оси  $J$ , а коэффициент диффузии по моментам  $R_{22}$  слабо зависит от  $J$  согласно (16). Этот эффект может стать существенным при "выталкивании" темной материи в область столь больших  $J$ , что диффузионное приближение перестает быть применимым, т.е. где изменения величин  $m, J$  за один период превосходят сами значения этих величин.

## 5. Сопоставление с наблюдениями и выводы

Сделаем теоретические оценки масс черных дыр  $M_{bh}$ , получаемых из закона роста (28), и сравним их с наблюдаемыми величинами для трех галактик.

В галактиках M 31 и NGC 4258 дисперсия скоростей звезд слабо зависит от расстояния до центра и средняя скорость составляет приблизительно 200 км/с [20]. Принимая значение  $f_0$  таким же, как в нашей Галактике (4), а время  $t = 3 \cdot 10^{17} \text{ с} = 10^{10}$  лет, получим значение  $M_{bh} = 1.8 \cdot 10^7 M_\odot$ , тогда как наблюдаемые значения равны  $(2.0-8.5) \cdot 10^7 M_\odot$  для M 31 и  $3.8 \cdot 10^7 M_\odot$  для NGC 4258. Это означает, что темная материя может составлять значительную долю массы черных дыр в этих галактиках.

В нашей Галактике зависимость дисперсии скоростей от расстояния до центра можно приближенно представить в виде  $\sigma(r) = \sigma_0 \left( \frac{r}{10 \text{ нс}} \right)^{1/4}$ ,  $\sigma_0 = 60 \text{ км/с}$  [12], что соответствует значению  $\alpha = 0.5$ . Тогда выражение (28) дает величину  $M_{bh} \approx 10^7 M_\odot$ , что приблизительно втрое превышает наблюдаемую массу  $M_{bh} \approx 2.9 \cdot 10^6 M_\odot$  [14]. Отметим, что по сравнению с работой [7], полученное в данной работе теоретическое значение  $M_{bh}$  приблизительно в два раза ближе к наблюдениям за счет более точной оценки потока  $S(t)$ .

Остающееся расхождение с наблюдениями может быть связано как с недостаточной чувствительностью (28) по отношению к изменению  $f_0$  и  $l_0$ , определяемых здесь оценочным образом, так и с не учтенной здесь эволюцией функции распределения звезд в балдже.

В целом можно признать, что рассмотренная в работе модель позволяет дать адекватную оценку для наблюдаемых масс сверхмассивных черных дыр и показывает, что значительную, если не большую, часть этой массы может составлять темное вещество. Дальнейшая разработка модели потребует, во-первых, более точного вычисления коэффициентов диффузии при малых моментах с учетом детального знания распределения звезд в центральных областях, во-вторых, задания модели эволюции балджа и его центральной области, и, в-третьих, перехода к решению двумерного уравнения диффузии по  $m, J$ . Такое рассмотрение позволит более точно учесть эффект набора энергии частицами темной материи и диффузию частиц из балджа.

Авторы благодарят В. Л. Гинзбурга за заинтересованное внимание, содействовавшее проведению данного исследования, а также А. В. Гуревича, К. П. Зыбина, А. С. Ильина и В. А. Сироту за многочисленные плодотворные дискуссии по теме работы. Работа выполнена при финансовой поддержке Минпромнауки РФ по гранту N НШ-2063.2003.2 и Российского фонда фундаментальных исследований по грантам NN 01-02-17829 и 03-02-06745.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gondolo P., Silk J. Phys. Rev. Lett., **83**, 1719 (1999); (astro-ph/9906391).
- [2] Mac Millan J. D., Henriksen R. N. Astrophys. J., **569**, 83 (2002); (astro-ph/0201153).
- [3] Ullio P., Zhao H., Kamionkowski M. Phys. Rev., **D64**, 043504 (2001); (astro-ph/0101481).
- [4] Navarro J., Frenk C., White S. Astrophys. J., **490**, 493 (1997); (astro-ph/9611107).
- [5] Gurevich A., Zybin K., Ilyin A. "Nonlinear dynamics of gravitating dark matter and baryonic matter" in: Proceedings of the Third International Sakharov Conference, eds. A.Semikhatov, M.Vasiliev, V.Zaikin (Moscow, Scientific World, 2002).
- [6] Gurevich A., Zybin K., Ilyin A. "Black hole growth in the center of the dark matter halo" in: Proceedings of the Third International Sakharov Conference, eds. A.Semikhatov, M.Vasiliev, V.Zaikin (Moscow, Scientific World, 2002).
- [7] Ильин А., Зыбин К., Гуревич А. ЖЭТФ (в печати).
- [8] Silk J. Int. J. Mod. Phys., **A17**, Supplement, 167 (2002); (astro-ph/0110404).
- [9] Гуревич А., Зыбин К. УФН, **165**, N 7, 723 (1995).



- [10] Fukushige L., Makino J. *Astrophys. J.*, **477**, L9 (1997).
- [11] Bureau M. "Structure, kinematics and dynamics of bulges" in: *Disk of Galaxies: Kinematics, Dynamics and Perturbations*, eds. E. Athanasoula, A. Bosnia & R. Mujica (San Francisco, ASP, 2002); (astro-ph/0203471).
- [12] Tremaine S. et al. *Astrophys. J.*, **574**, 740 (2002); (astro-ph/0203468).
- [13] Kormendy J., Gebhardt K. "Supermassive Black Holes in Nuclei of Galaxies" in: *The 20th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics*, eds. H. Martel & J.C. Wheeler (New York, AIP, 2001); p.363; (astro-ph/0105230).
- [14] Schrödel R., Genzel R., Ott T., Eckart A. *Astron. Nachr.*, **324**, S1 (2003): Special Supplement The Central 300 Parsecs of the Milky Way, eds. A. Cotera, H. Falcke, T.R. Geballe, S. Markoff; (astro-ph/0304197).
- [15] Ott T. et al. *The ESO Messenger*, **111**, 1 (2003); (astro-ph/0303408).
- [16] Ли́фши́ц Е., Пита́евский Л. *Физическая кинетика*, М., Наука, 1979.
- [17] Genzel R. "The Nuclear Star Cluster of the Milky Way: Star Formation, Dynamics and Central Black Hole" in: *Proceedings of the Star2000 Meeting, Heidelberg, March 2000*, ed. R. Spurzem; (astro-ph/0008119).
- [18] Поляченко В., Фридман А. *Равновесие и устойчивость гравитирующих систем*, М., Наука, 1976.
- [19] Faber S. M. et al. *Astrophys. J.*, **114**, 1771 (1997); (astro-ph/9610055).
- [20] Sofue Y., Rubin V. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **39**, 137 (2001); (astro-ph/0010594).

Поступила в редакцию 1 сентября 2003 г.