Краткие сообщения по физике № 4 1979

О ПИРСОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СКОМПЕНСИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

Н. И. Карбушев, А. А. Рухадзе

УДК 533.95

Найдено аналитическое решение задачи Пирса об устойчивости в ограниченном цилиндрическом дрейфовом пространстве релятивистского электронного пучка, скомпенсированного бесконечно тяжелым ионным фоном.

I. Среди неустойчивостей скомпенсированных электронных пучков пирсовская неустойчивость занимает особое место. Во-первых, она была первой предсказана теоретически Пирсом /I/ и впоследствии обнаружена экспериментально, а во-вторых, она является чисто электронной, и компенсирующий пучок фон ионов на ее развитие никакого влияния не оказывает. Являясь электростатической и апериодически нарастающей во времени, она приводит в пространственно ограниченных электронных пучках к образованию "виртуального катода" и запиранию пучка при токах, превышающих некоторое предельное значение, получившее название пирсовского тока.

Задача Пирса в литературе исследовалась неоднократно. Однако строгое аналитическое ее решение было найдено только для случая прямолинейного скомпенсированного пучка в плоском дрейфовом пространстве /I,2/. Для электронных же пучков в цилиндрическом дрейфовом пространстве до сих пор эту задачу удавалось проанализировать лишь численными методами /2,3/. Ниже показано, что и в цилиндрической геометрии задача Пирса решается аналитически.

Система уравнений для задачи Пирса в бесконечно сильном продольном магнитном поле - система линеаризованных уравнений Пуассона, уравнения движения и уравнения непрерывности для электронов - записываются в виде:

$$\Delta\Phi = -4\pi e\delta n,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_{\parallel}\frac{\partial}{\partial z}\right)\delta v_{\parallel} = -\frac{e}{m\gamma\gamma_{\parallel}^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{I}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_{\parallel}\frac{\partial}{\partial z}\right)\delta n + n_b\frac{\partial\delta v_{\parallel}}{\partial z} = 0.$$

Здесь e и m – заряд и масса электрона, $\gamma = \left[1 - (u_{\perp}^2 + u_{\parallel}^2)/c^2\right]^{-1/2}$ и $\gamma_{\parallel} = (1 - u_{\parallel}^2/c^2)^{-1/2}$ – характеризуют равновесные поперечную и продольную составляющие скорости электронов пучка [ж)], n_b – их плотность, а δn и $\delta v_{\parallel}$ – возмущения плотности и скорости соответственно.

Система (I) дополняется известными граничными условиями на продольных торцах дрейфового пространства /I/

$$\delta n\big|_{z=0} = \delta v_{\parallel}\big|_{z=0} = 0, \qquad \Phi\big|_{z=0} = \Phi\big|_{z=L} = 0, \tag{2}$$

а также на проводящем кожухе, ограничивающем пучок в поперечном направлении,

$$\Phi\big|_{r=R} = 0, \tag{3}$$

если он имеется в системе. В силу стационарности задачи временную зависимость возмущенных величин ищем в виде $\exp(-i\omega t)$. Определим условия, при которых собственные значения ω обладают положительной мнимой частью, что соответствует неустойчивости системы с инкрементом нарастания $\delta = \mathrm{Im}\,\omega$.

2. Прежде чем перейти к анализу задачи Пирса в цилиндрическом дрейфовом пространстве, напомним основные моменты решения плоской задачи $(R \to \infty,\ \partial\Phi/\partial r = 0)$, обобщив их на случай пучков с $u_{\perp} \neq 0$. В этом пределе система (I) сводится к одному весьма простому обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left[\left(-i\omega + u_{\parallel}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 + \frac{\omega_b^2}{\gamma\gamma_{\parallel}^2}\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0, \tag{4}$$

где $\omega_b = \sqrt{4\pi e^2 n_b/m}$ – ленгмюровская частота электронов пучка.

Общее решение уравнения (4) записывается в виде:

ж) Система (I) отличается от исследованной в работах /I-3/ учетом ненулевой поперечной скорости $(u_{\perp} \neq 0)$.

$$\Phi = \Phi_1 \exp(ik_1 z) + \Phi_2 \exp(ik_2 z) + \Phi_3 z + \Phi_4, \qquad (5)$$

где $k_{1,2}$ определяются из характеристического уравнения

$$1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma\gamma_\parallel^2(\omega - ku_\parallel)^2} = 0 \qquad (6)$$

и соответственно равны

$$k_{1,2} = \frac{1}{u_\parallel}\left(\omega \pm \frac{\omega_b}{\gamma_\parallel\sqrt{\gamma}}\right). \qquad (7)$$

Подстановка решения (5) в граничные условия (2) и учет связи (I) приводит к следующему дисперсионному уравнению для определения ω:

$$\left(\omega + \frac{\omega_b}{\gamma_\parallel\sqrt{\gamma}}\right)^2 \exp\left[\frac{iL}{u_\parallel}\left(\omega + \frac{\omega_b}{\gamma_\parallel\sqrt{\gamma}}\right)\right] - \left(\omega - \frac{\omega_b}{\gamma_\parallel\sqrt{\gamma}}\right)^2 \times$$

$$\times \exp\left[\frac{iL}{u_\parallel}\left(\omega - \frac{\omega_b}{\gamma_\parallel\sqrt{\gamma}}\right)\right] = 4\frac{\omega\omega_b}{\gamma_\parallel\sqrt{\gamma}} + 2i\frac{\omega^2\gamma_\parallel\sqrt{\gamma}}{\omega_b}\frac{L}{u_\parallel}\left(\omega^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma_\parallel^2\gamma}\right). \qquad (8)$$

Из этого уравнения следует, что решения с $\operatorname{Im}\omega > 0$ существуют только в интервалах

$$(2n - 1)\frac{\pi u_\parallel}{L} < \frac{\omega_b}{\gamma_\parallel\sqrt{\gamma}} < 2n\frac{\pi u_\parallel}{L}, \qquad (9)$$

где $n = 1, 2, 3 \ldots$. Для $n = 1$ отсюда находим пороговую плотность тока пучка для возникновения пирсовской неустойчивости в плоском случае

$$j_{th} = \pi\gamma\gamma_\parallel^2(mu_\parallel^3/4eL^2). \qquad (10)$$

При превышении этого порога происходит апериодическое нарастание возмущений (образование "виртуального катода"), причем максимальный инкремент достигается при $j \gtrsim j_{th}$ и равен *)

$$\delta_{max} = \operatorname{Im}\omega_{max} \approx u_\parallel/L. \qquad (11)$$

---

*) В непосредственной близости от порога $\delta = \gamma\gamma_\parallel^2(u_\parallel/L)(j/j_{th} - 1)$, причем это соотношение справедливо и для рассмотренного ниже цилиндрического случая.

3. Перейдем теперь к рассмотрению цилиндрического случая, записав систему уравнений (I) в виде

$$\left(-i\omega + u_{\parallel}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \Delta\Phi + \frac{\omega_b^2}{\gamma_{\parallel}^2\gamma}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{I2}$$

Учитывая цилиндрическую симметрию и граничное условие (3), решение этого уравнения будем искать в виде

$$\Phi = J_1(\mu_{1s}r/R)\sum_{n=1}^{4}\Phi_n \exp(ik_n z), \tag{I3}$$

где μ_{1s} – корни функций Бесселя, $J_1(\mu_{1s}) = 0$, а k_n определяются из характеристического уравнения 4-й степени

$$\frac{\mu_{1s}^2}{R^2} + k^2\left[1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma\gamma_{\parallel}^2(\omega - ku_{\parallel})^2}\right] = 0. \tag{I4}$$

В пределе $R\to\infty$ оно переходит в (6).

Трудности решения задачи Пирса в цилиндрическом случае как раз и связаны с аналитическим решением уравнения (I4) и нахождением всех четырех корней k_n. Эти трудности однако легко преодолеваются, если интересоваться порогом возникновения неустойчивости, где $\omega \lessapprox \omega_b$ (как это было показано в плоском случае). Учитывая это обстоятельство, находим искомые корни k_n:

$$k_{1,2} \approx \pm\frac{1}{u_{\parallel}}\sqrt{\frac{\omega_b^2}{\gamma\gamma_{\parallel}^2} - k_{\perp}^2u_{\parallel}^2} + \frac{\omega\omega_b^2}{\gamma\gamma_{\parallel}^2u_{\parallel}}\left(\frac{\omega_b^2}{\gamma\gamma_{\parallel}^2} - k_{\perp}^2u_{\parallel}^2\right)^{-1},$$

$$k_{3,4} \approx \omega\left(u_{\parallel} \mp \frac{\omega_b}{k_{\perp}\gamma_{\parallel}\sqrt{\gamma}}\right)^{-1}, \tag{I5}$$

где $k_{\perp} = \mu_{1s}/R$. Условием справедливости этих выражений является неравенство

$$\omega^2 < \left|\frac{\omega_b^2}{\gamma\gamma_{\parallel}^2} - k_{\perp}^2u_{\parallel}^2\right|. \tag{I6}$$

Теперь не представляет труда, воспользовавшись граничными условиями (2), получить дисперсионное уравнение для определения спектра собственных значений ω:

$$\left(\frac{\omega_b^2}{\gamma\gamma_{\parallel}^2} - k_{\perp}^2 u_{\parallel}^2\right)^{3/2} \left(e^{ik_1L} - e^{ik_2L}\right) - \frac{2\omega\omega_b^2}{\gamma\gamma_{\parallel}^2}\left(e^{ik_1L} + e^{ik_2L} - e^{ik_3L} - e^{ik_4L}\right) =$$

$$= -\frac{\omega\omega_b}{\gamma_{\parallel}\sqrt{\gamma}\, k_{\perp} u_{\parallel}}\left(\frac{\omega_b^2}{\gamma\gamma_{\parallel}^2} + k_{\perp}^2 u_{\parallel}^2\right)\cdot\left(e^{ik_3L} - e^{ik_4L}\right). \qquad (17)$$

В пределе $k_{\perp} \to 0$ (т.е. $R \to \infty$) это уравнение переходит в (8). По аналогии с уравнением (8) можно легко показать, что уравнение (17) имеет решения с $\operatorname{Im}\omega > 0$ в интервалах (ср. с (9)):

$$(2n - 1)\frac{\pi u_{\parallel}}{L} < \sqrt{\frac{\omega_b^2}{\gamma\gamma_{\parallel}^2} - k_{\perp}^2 u_{\parallel}^2} < 2n\frac{\pi u_{\parallel}}{L}, \qquad (18)$$

где $n = 1, 2, 3 \ldots$. Полагая $n = 1$, а $k_{\perp} = \mu_{01}/R = 2{,}4/R$, находим пороговую плотность тока пучка для возникновения пирсовской неустойчивости в цилиндрическом дрейфовом пространстве

$$j_{th} = \gamma\gamma_{\parallel}^2 (mu_{\parallel}^3/4\pi e)\left[(2{,}4/R)^2 + (\pi/L)^2\right]. \qquad (19)$$

Поскольку в реальных системах продольные размеры намного превосходят поперечные, т.е. $L \gg R$, то (19) определяет полный пороговый ток пучка в цилиндрическом случае

$$J_{th} = \pi R^2 j_{th} \simeq 1{,}44\gamma\gamma_{\parallel}^2 mu_{\parallel}^3/e = 24{,}5\beta_{\parallel}^3\gamma\gamma_{\parallel}^2 \text{ кА}. \qquad (20)$$

Максимальный инкремент развития пирсовской неустойчивости в цилиндрическом случае достигается при небольшом превышении порога (19) и дается выражением

$$\delta_{max} = \operatorname{Im}\omega_{max} \simeq \frac{u_{\parallel}}{L}\left[1 + \left(\frac{2{,}4L}{\pi R n}\right)^2\right]^{-1} \simeq \frac{u_{\parallel}}{L}. \qquad (21)$$

Здесь также неустойчивость чисто апериодическая и развивается с образованием "виртуального катода" и запиранием сверхпредельного тока пучка.

В заключение заметим, что учет конечности напряженности внешнего магнитного поля в цилиндрическом случае приводит к увеличению величины предельного пирсовского тока, которое становится существенным при $\omega_b \gtrsim \Omega_e$, где $\Omega_e = eB_0/mc$ – ларморовская частота вращения электронов в поле B_0. В то же время в плоском случае конечность магнитного поля не меняет величину предельной плотности тока (10).

Поступила в редакцию
24 декабря 1978 г.

Литература

1. J. R. Pierce, Journ. Appl. Phys., 15, 721 (1944).
2. М. В. Незлин, УФН, 102, 105 (1970).
3. J. Frey, C. K. Birdsall, Journ. Appl. Phys., 37, 2051 (1966).