Краткие сообщения по физике № 9 1979

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПЕРЕХОДНОЙ МАТРИЦЫ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ КОНТИНИУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Д. М. Штейнградт

УДК 536.764

Продемонстрировано применение метода переходной матрицы на примере континиуального интеграла по грассмановским переменным, получающегося при вычислении статсуммы двумерной модели Изинга.

Рассмотрим континиуальный интеграл возникающий при вычислении статсуммы двумерной модели Изинга с прямоугольными ячейками /I/:

$$Z = \int\{du\} \exp \sum_{i=1,j=1}^{M;N} (xu_{1,i+1,j}u_{3,i,j} + yu_{2,i,j+1}u_{4,i,j}) \times$$

$$\times \exp \sum_{i=1,j=1}^{M,N} \left(\sum_{r<s=1}^{4} u_{r,i,j}u_{s,i,j} \right). \qquad (I)$$

Отождествим интегрирование по $u_{2,i,j+1}$, $u_{4,i,j}$ с весом $\exp(yu_{2,i,j+1}u_{4,i,j})$ с операцией перемножения матриц, при этом самой матрицей будет являться интеграл

$$M(u,v) = \int\{du_1du_3\} \exp \sum_{i=1}^{M} (u_{1,i}u_i + u_{1,i}u_{3,i} + u_{1,i}v_i + u_iv_i +$$

$$+ u_{3,i}v_i + xu_{1,i+1}u_{3,i}). \qquad (2)$$

Таким образом первоначальный континиуальный интеграл (I) представляет собой шпур от N-ой степени матрицы (2), вычислить который нетрудно, если найти собственные значения матрицы. В результате мы приходим к уравнению

$$\sum_{v} M(u,v)\, P(v) = \lambda P(u), \qquad (3)$$

или в более подробной записи

$$\int\{dvdw\}\exp\left[\sum_{i=1}^{M} yv_iw_i\right]M(u,v)P(w) = \lambda P(u). \qquad (4)$$

Поскольку "переходная матрица" есть гауссова экспонента, то естественно предположить, что и "собственный вектор" $P(u)$ есть гауссова экспонента:

$$P(u) = \exp\frac{1}{M}\sum_{i,m=1}^{M} u_iD_mu_{i+m}. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (4) получаем:

$$\int\{du_1du_3dvdw\}\ \exp\sum_{i=1}^{M}(u_{1,i}u_i + u_{1,i}u_{3,i} +$$

$$+ u_{1,i}v_i + u_iu_{3,i} + u_iv_i + u_{3,i}v_i + xu_{1,i+1}u_{3,i} +$$

$$+ yv_iw_i + \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} w_iD_mw_{i+m}\Bigg) = \lambda\exp\sum_{i,m=1}^{M}\frac{1}{M}(u_iD_mu_{i+m}). \qquad (6)$$

Континиуальный интеграл в (6) можно вычислить с помощью Фурье-преобразования:

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{k=1}^{M}\exp\left(\frac{2\pi Iik}{M}\right)\tilde{u}_k;\quad I^2 = -1. \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получаем:

$$\int\{d\tilde{u}_1d\tilde{u}_3d\tilde{v}d\tilde{w}\}\exp\sum_{k=1}^{M}\Big[\tilde{u}_{M-k}(-\tilde{u}_{1,k} + \tilde{u}_{3,k} + \tilde{v}_k) +$$

$$+ \tilde{u}_{1,M-k}(1 + xz)\tilde{u}_{3,k} + \tilde{u}_{1,M-k}\tilde{v}_k + \tilde{u}_{3,M-k}\tilde{v}_k + y\tilde{v}_{M-k}\tilde{w}_k +$$

$$+ \tilde{w}_{M-k}\tilde{D}_k\tilde{w}_k\Big] = \prod_{k=1}^{M}\sqrt{(1 + xz)(1 + xz^{-1}) - x(z - z^{-1})\tilde{D}_k}\ \times$$

$$\times\exp\sum_{k=1}^{M}\left(-\tilde{u}_{M-k}\frac{\tilde{D}_k(1 - xz)(1 - xz^{-1}) + y^2x(z - z^{-1})}{y^2(1 + xz)(1 + xz^{-1}) - \tilde{D}_kx(z - z^{-1})}\tilde{u}_k\right) =$$

$$= \lambda\exp\sum_{k=1}^{M}(\tilde{u}_{M-k}\tilde{D}_k\tilde{u}_k),$$

$$z = \exp(2\pi Ik/M),\quad \tilde{D}_k = \sum_{m=1}^{M} z^mD_m. \qquad (8)$$

Предполагая в (8) равенство справедливым для каждого k, получаем:

$$\lambda = \prod_{k=1}^{M} \sqrt{2^{-1}\left[(1 + x^2)(1 + y^2) - x(1 - y^2)(z + z^{-1}) \pm \sqrt{A}\right]},$$

$$\tilde{D}_k = \frac{-(1 + x^2)(1 - y^2) + x(1 + y^2)(z + z^{-1}) \pm \sqrt{A}}{2x(z - z^{-1})}, \qquad (9)$$

где:

$$A = \left[(1 + x^2)(1 + y^2) - x(1 - y^2)(z + z^{-1})\right]^2 - 4y^2(1 - x^2)^2.$$

В итоге мы получили явное выражение для собственного вектора и собственных значений переходной матрицы.

В заключение хочу выразить свою признательность и благодарность моему научному руководителю Е. С. Фрадкину.

Поступила в редакцию
25 мая 1979 г.

Литература

1. Е. С. Фрадкин, Д. М. Штейнградт, Препринт ФИАН № 100, 1976 г.
Е. С. Фрадкин, Д. М. Штейнградт, Препринт института теоретической физики. г. Цюрих, СН-8049, Швейцария, 1977 г.