Краткие сообщения по физике № 9 1979

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Э. А. Ахундова, В. В. Додонов, В. И. Манько

УДК 530.145

Перечислены нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка, которые могут быть сведены к линейным уравнениям, и рассмотрены точные решения одного из указанных уравнений.

В последнее время большое внимание в физике уделяется проблеме нахождения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, встречающихся при описании динамических систем. Несмотря на различие форм, все, сейчас пока известные методы (см. /1-4/), основаны на очень простой идее - свести проблему решения данного нелинейного уравнения при помощи некоторых преобразований к проблеме решения более простого хорошо изученного уравнения. Другой подход к решению этой проблемы состоит в описании и анализе классов нелинейных уравнений, получаемых при применении различных форм преобразований к данному классу линейных уравнений /5/. Сведение нелинейных уравнений второго порядка к линейным рассматривалось в /6/. Недавно исследовались некоторые точно решаемые нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка, например, уравнение КдВ (см. /2-4/). В данной работе мы перечислим типы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка от двух переменных, которые сводятся заменами зависимых переменных к линейным уравнениям второго порядка, и остановимся на нахождении точных решений одного из типов полученных уравнений.

Ограничимся изучением уравнений полиномиального вида. Тогда, рассматривая уравнение $a\psi_t + b\psi_{xt} + c\psi_{tt} + d\psi_{xx} = 0$, где коэффициенты a, b, c и d являются произвольными функциями переменных x и t, и производя в нем замены вида $\psi = \exp(\gamma\varphi + \delta\varphi_x + \beta\varphi_t)$ (другие замены приводят к неполиномиальным уравнениям), получим пять разных дифференциальных уравнений в частных производных, линейных относительно третьей производной и нелинейных относительно вторых и первых производных /7/, в зависимости от соотношений между коэффициентами a, b, c, d, γ, δ, β.

$$a(\gamma\varphi_t + \delta\varphi_{xt}) + d(\gamma^2\varphi_x^2 + \delta^2\varphi_{xx}^2 + 2\gamma\delta\varphi_{xx}\varphi_x + \gamma\varphi_{xx} + \delta\varphi_{xxx}) = 0,$$
$$b = c = \beta = 0. \qquad (\text{I})$$

$$a(\gamma\varphi_t + \delta\varphi_{xt}) + b(\gamma^2\varphi_t\varphi_x + \gamma\delta\varphi_{xt}\varphi_x + \gamma\delta\varphi_t\varphi_{xx} + \delta^2\varphi_{xt}\varphi_x +$$
$$+ \gamma\varphi_{xt} + \delta\varphi_{xxt}) = 0, \qquad (\text{II})$$
$$c = d = \beta = 0.$$

$$a(\gamma\varphi_t + \delta\varphi_{xt}) + c\Big[\gamma^2\varphi_t^2 + \delta^2\varphi_{xt}^2 + \gamma\varphi_{tt} + 2\gamma\delta\varphi_{xt}\varphi_t +$$
$$+ \gamma^2\varphi_x^2 + \delta^2\varphi_{xx}^2 + \gamma\varphi_{xx} + 2\gamma\delta\varphi_{xx}\varphi_x + \delta(\varphi_{xxx} + \varphi_{xtt})\Big] = 0, \qquad (\text{III})$$
$$c = d, \ \beta = b = 0.$$

$$a(\gamma\varphi_t + \beta\varphi_{tt}) + d(\gamma^2\varphi_x^2 + \beta^2\varphi_{tx}^2 + 2\gamma\beta\varphi_{tx}\varphi_x + \gamma\varphi_{xx} + \beta\varphi_{txx}) = 0,$$
$$b = c = \delta = 0. \qquad (\text{IV})$$

$$a\big[\gamma\varphi_t + \beta(i\varphi_{xt} + \varphi_{tt})\big] + d\Big[\gamma^2(\varphi_t\varphi_x + \varphi_x^2) + \alpha\gamma(i\varphi_{tt}\varphi_x - \varphi_t\varphi_{xx} +$$
$$+ i\varphi_t\varphi_{xt} + 2i\varphi_{xx}\varphi_x + 2\varphi_{tx}\varphi_x) + \gamma^2(\varphi_{tx}^2 - i\varphi_{xt} - \varphi_{tt}\varphi_{xx} + i\varphi_{tt} -$$
$$- \varphi_{xt} - \varphi_{xx}^2 + 2i\varphi_{xx}\varphi_{tx}) + \alpha(i\varphi_{xt} + \varphi_{xx}) + \gamma(i\varphi_{xtt} - \varphi_{xxt} + \qquad (\text{V})$$
$$+ i\varphi_{xxx} + \varphi_{txx})\Big] = 0,$$

$$c = 0, \ b = id, \ \beta = i\gamma.$$

Остальные уравнения этого класса сводятся к указанным уравнениям заменами независимых переменных (в частности, x⇄t).

Получим точные решения уравнения (II). Это уравнение сводится к линейному уравнению

$$a\psi_t + d\psi_{xx} = 0 \qquad (1)$$

при замене

$$\psi = \exp(\gamma\varphi + \beta\varphi_t). \qquad (2)$$

Среди решений уравнения (1) есть функция когерентного состояния (считаем, что $d = \mathrm{const}$)

$$\psi_\alpha = \pi^{-1/4}\exp\left[-|\alpha|^2/2 + \alpha x/\sqrt{2} - \alpha^2(dt/2a + 1)/4\right](dt/2a + 1)\times$$

$$\times\exp\left\{-\left[x - \alpha(dt/2a - 1)/\sqrt{2}\right]^2\Big/2(dt/2a + 1)\right\}. \qquad (3)$$

Подставив это выражение в (2), находим точное решение уравнения (II):

$$\varphi_\alpha(x,t) = -\gamma^{-1}\left[(1/4)\ln\pi + |\alpha|^2/2 + \alpha^2(dt/2a + 3 - \beta\gamma^{-1})/2 +\right.$$

$$\left. + \ln(dt/2a + 1)/2\right] - a(\beta d)^{-1}\left[-\beta d/2a\gamma + x^2 - 4\alpha x/\sqrt{2} +\right.$$

$$\left. + \alpha^2\exp(-\gamma t/\beta + d\gamma/2a\beta)\mathrm{Ei}(2a\gamma(dt/2a + 1)/d\beta)\right], \qquad (4)$$

где $\mathrm{Ei}(ax) = \int[\exp(ax)/x]dx$.

Зная, что ψ_α является производящей функцией полиномов Эрмита, можно получить другие решения вида:

$$\varphi_n(x,t) = -\gamma^{-1}\left[(1/4)\ln\pi + |\alpha|^2/2 + \ln(dt/2a + 1)/2\right] -$$

$$- 2a\beta^{-1}(-\beta/\gamma + x^2)\exp(d\gamma/2a\beta - \gamma t/\beta)\mathrm{Ei}(2a\gamma(dt/2a + 1)/d\beta) +$$

$$+ \exp(-\gamma t/\beta)\int\ln\left[H_n(\sqrt{2}(-d^2t^2/4a^2 - 1)/4x)\right]\exp(\gamma t/\beta)dt. \qquad (5)$$

Если известны интегралы движения уравнения (1), то есть операторы $\hat{I}_\alpha$, удовлетворяющие соотношению $\left[\hat{I}_\alpha,\ a\,\partial/\partial t + d\partial^2/\partial x^2\right]\psi = 0$, то из любого решения $\psi(x,t)$ уравнения (1) можно получить новые решения $\tilde{\psi}(x,t)$ по следующему правилу /8/: $\tilde{\psi} = f(\hat{I}_1,\hat{I}_2,\ldots\hat{I}_n)\psi$, где f – произвольная функция. Следовательно, если φ – решение уравнения (II), то любые функции вида $\tilde{\varphi} = \hat{L}\tilde{\psi} = \hat{L}f(\hat{I}_1,\hat{I}_2,\ldots\hat{I}_n)L^{-1}\varphi$ также являются решениями этого уравнения /6/, где $\hat{L}$ – оператор преобразования от ψ к φ. Интегралами движения для уравнения (1) являются, например, операторы $\hat{I}_1 = \partial/\partial t$, $\hat{I}_2 = \partial/\partial x$, $\hat{I}_3 = x - 2tda^{-1}\partial/\partial x$. Поэтому можно получать новые точные решения уравнения (П) из уже известных, например, (3) или (4), по следующему правилу:

$$\tilde{\varphi} = (\gamma + \beta\,\partial/\partial t)^{-1} \ln f(\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3) \exp(\gamma\varphi + \beta\varphi_t). \qquad (6)$$

Аналогичным образом можно получать и решения остальных уравнений (I) - (У).

Поступила в редакцию
31 мая 1979 г.

Литература

I. Е. Н. Пелиновский, "Известия ВУЗов", сер. "Радиофизика", XIX, 883 (1976).
2. И. М. Кричевер, УМН, 32, 183 (1977).
3. Ю. И. Манин, Проблемы современной математики, II, 3, ВИНИТИ (1978).
4. Bäclund transformations, the inverse scattering method solutions and their applications, ed. by R. M. Miura (Lecture notes in mathematics, No 515), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New-York (1976).
5. J. L. Reid, P. B. Burt, Journ. Math. Anal. Appl., 47, 520(1974).
6. В. В. Додонов, В. И. Манько, Препринт ФИАН № 209, 1977 г.
7. Э. А. Ахундова, В. В. Додонов, В. И. Манько, Препринт ФИАН № 225, 1978 г.
8. Э. Б. Аронсон, И. А. Малкин, В. И. Манько, ЭЧАЯ, 5, 122 (1974).