

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СРЕДНЕЙ ПЛОТНОСТИ ЭКСИТОНОВ

И. Д. Маш

УДК 539.3

В приближении хаотических фаз получено уравнение для средней плотности экситонов в зависимости от координаты и времени.

В работе получено уравнение для средней плотности экситонов в полупроводниковой среде, позволяющее определить плотность экситонов в зависимости от координаты и времени. Использовалось приближение хаотических фаз. Показано, что при низких температурах в коэффициент диффузии экситонов основной вклад вносит обменное взаимодействие. При большом времени релаксации плотность экситонов удовлетворяет звуковому уравнению. Определена скорость звука.

В работе рассматриваются экситоны, являющиеся связанным состоянием электрона и дырки в результате кулоновского взаимодействия. Предполагается, что релаксация экситонов обусловлена взаимодействием с тепловыми колебаниями решетки.

Гамильтониан системы можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m_1} a_k^+ a_k + \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m_2} b_k^+ b_k + \\
 & + \sum_q \frac{4\pi e^2}{V \varepsilon(q)^2} [A_q A_{-q} + B_q B_{-q} - 2A_q B_{-q}] + \\
 & + \sum_q \alpha(q) (\psi_{-q}^+ + \psi_q) (A_q - B_q).
 \end{aligned}$$

Здесь  $a_k^+$ ,  $b_k$  - операторы рождения соответственно электрона и дырки,

$$A_q = \sum_k a_{k+q}^+ a_k, \quad B_q = \sum_k b_{k+q}^+ b_k$$

$\psi_q$  - оператор рождения фотона,  $\alpha(q)$  - константа электрон-фононной связи,  $\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость. Для вывода уравнения для усредненной плотности экситонов введем оператор

$$X_q = \frac{m_1}{m_1 + m_2} A_q + \frac{m_2}{m_1 + m_2} B_q.$$

Среднее значение  $X_q$  - Фурье-компонента плотности экситонов, обладающих импульсом  $q$ .

Уравнение для производной  $X_q$  по времени  $\frac{\partial X_q}{\partial t}$  имеет вид

$$-i\hbar \frac{\partial X_q}{\partial t} = \sum_k [E(k+q) - E(k)] [a_{k+q}^+ a_k + b_{k+q}^+ b_k],$$

где  $E(k) = \hbar^2 k^2 / 2(m_1 + m_2)$ .

Уравнение для второй производной  $X_q$  по времени  $\frac{\partial^2 X_q}{\partial t^2}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \hbar^2 \frac{\partial^2 X_q}{\partial t^2} = & -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \sum_k \left[ \frac{\hbar^2 (k+q)^2}{2m_1} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_1} \right] a_{k+q}^+ a_k - \\ & -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \sum_k \left[ \frac{\hbar^2 (k+q)^2}{2m_2} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_2} \right] b_{k+q}^+ b_k - \\ & - \sum_{q'} \frac{4\pi e^2 q q' \hbar^2}{V \epsilon |q'|^2 (m_1 + m_2)} \sum_k [a_{k+q+q'}^+ (A_{-q'} - B_{-q'}) a_k + \\ & + b_{k+q+q'}^+ (B_{-q'} - A_{-q'}) b_q] + \sum_{q'} \alpha(q') (\psi_{-q'} + \psi_{q'}) \sum_k [E(k+q) - E(k)] \times \\ & \times (a_{k+q+q'}^+ a_k - a_{k+q}^+ a_{k-q'} b_{k+q+q'}^+ b_k + b_{k+q}^+ b_{k-q'}). \end{aligned}$$

Используя приближение хаотических фаз /1/, получим

$$\begin{aligned} \sum_{q'} \alpha(q') (\psi_{-q'} + \psi_{q'}) [a_{k+q+q'}^+ a_k - a_{k+q}^+ a_{k-q'} - \\ - b_{k+q+q'}^+ b_k + b_{k+q}^+ b_{k-q'}] = i\hbar \nu (a_{k+q}^+ a_k + b_{k+q}^+ b_k), \end{aligned}$$

где  $1/\nu$  - время релаксации экситонов.

Усредняя первые два члена в (2), получим

$$- q^2 \frac{kT}{m_1 + m_2} \hbar^2 \chi_q.$$

Третий и четвертый член в (2) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & - \sum_{q^*k} \frac{4\pi e^2 (qq^*) \hbar^2}{v |q^*|^2 (m_1 + m_2)} \left[ a_{k+q+q^*}^+ (A_{-q^*} - B_{-q^*}) a_k + \right. \\ & \left. + b_{k+q+q^*}^+ (B_{-q^*} - A_{-q^*}) b_k \right] = \\ & = \frac{4\pi e^2 (\bar{q}\bar{q}^*)}{v v |q^*|^2 (m_1 + m_2)} \left[ (a_{k+q}^+ a_k + b_{k+q}^+ b_k) \times \right. \\ & \left. \times (n(k+q+q^*) - n(k+q^*)) \right] = \\ & = \frac{8\pi e^2 \hbar^2 n}{\varepsilon (m_1 + m_2)} \sum_k \int dx^3 \left( \frac{(\bar{q}\bar{x}-k-\bar{q})}{|x-k-q|^2} - \frac{(\bar{q}\bar{x}-k)}{|x-k|^2} \right) \alpha^2(x) = \\ & = 40\pi \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \hbar^2 \omega_{\text{экс}}^2 n r_{\text{экс}}^5 q^2 \chi_q. \end{aligned}$$

Здесь  $n(k) = a_k^+ a_k = n \alpha^2(k)$ , где  $\alpha(k)$  - волновая функция водородоподобного атома в импульсном представлении,  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ,  $\varepsilon$  - диэлектрическая постоянная,  $\omega_{\text{экс}}$  - энергия связи экситона,  $n$  - концентрация экситонов.

Использованное приближение соответствует приближению хаотических фаз, которое позволяет учитывать обменное взаимодействие. Прямое взаимодействие экситонов в первом приближении равно нулю. Таким образом, получим следующее уравнение для  $\partial^2 \chi_q / dt^2$ :

$$\frac{\partial^2 \chi_q}{\partial t^2} = - \left( \frac{kT}{m_1 + m_2} + 40\pi \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega_{\text{экс}}^2 n r_{\text{экс}}^5 \right) q^2 \chi_q - \nu \frac{\partial \chi_q}{\partial t}.$$

Предполагая, что время релаксации  $1/\nu$  слабо зависит от  $q$ , получим

$$\frac{\partial^2 X_q}{\partial t^2} = \Delta \Delta X - \nu \frac{\partial X}{\partial t},$$

где  $A = kT + 40\pi m_1 m_2 / (m_1 + m_2) \omega_{\text{ЭКС}}^2 n r_{\text{ЭКС}}^5$ . Для импульсов

$$q^2 = \nu^2 \left( \frac{kT}{m_1 + m_2} + 40\pi \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega_{\text{ЭКС}}^2 n r_{\text{ЭКС}}^5 \right)^{-1}$$

получаем уравнение диффузии  $\partial X / \partial t = D \Delta X$ , с коэффициентом диффузии

$$D = \frac{1}{\nu} \left[ \frac{kT}{m_1 + m_2} + 40\pi \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega_{\text{ЭКС}}^2 n r_{\text{ЭКС}}^5 \right].$$

При низких температурах основной вклад в коэффициент диффузии вносит обменное взаимодействие. Действительно, условие

$$40\pi \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega_{\text{ЭКС}}^2 n r_{\text{ЭКС}}^5 > \frac{kT}{m_1 + m_2}$$

означает, что  $kT < 12 E_{\text{СВ ЭКС}}$  при  $n r_{\text{ЭКС}} \approx 1/10$ , причем для существования экситонов должно быть  $kT < E_{\text{СВ}}$ . Для больших времен релаксации получаем звуковое уравнение  $\partial^2 X / \partial t^2 = v^2 \Delta X$ , где скорость звука

$$v = \sqrt{\frac{kT}{(m_1 + m_2)} + 40\pi \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega_{\text{ЭКС}}^2 n r_{\text{ЭКС}}^5}.$$

Отметим, что если существенно только синглетное состояние (полный спин экситона равен нулю), то уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 X_q}{\partial t^2} = - \left( \frac{kT}{m_1 + m_2} - 20\pi \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \omega_{\text{ЭКС}}^2 n r_{\text{ЭКС}}^5 \right) q^2 X_q - \nu \frac{\partial X_q}{\partial t},$$

что соответствует притяжению между экситонами из-за обменного взаимодействия.

Поступила в редакцию  
15 ноября 1978 г.

### Л и т е р а т у р а

1. H. Suhl and N. R. Nerthamer, Phys. Rev., 122, second series, N 2, 359 (1961).