Краткие сообщения по физике № 1 1978

СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЯНГА-МИЛЛСА В СЛУЧАЕ НЕНУЛЕВОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

С. Е. Коньштейн

УДК 530.I45

Получены сферически-симметричные, периодические по t решения уравнений Янга-Миллса в эвклидовом пространстве. Эти решения нужны для получения асимптотики статистической суммы полей Янга-Миллса.

I. Для вычисления статистической суммы ансамбля полей Янга-Миллса при ненулевой температуре полезно знать периодические по мнимому времени с периодом β решения уравнений Янга-Миллса. Для $\beta = \infty$ такие решения впервые получили А. Белавин, А. Поляков, Ю. Тюпкин и А. Шварц /I/. Затем Е. Виттен получил сферически-симметричное решение /2/ и впоследствии Хуфт указал $5N$-параметрическое семейство решений /3/. Б. Харрингтон и Г. Шепард /4/, следуя работе /I/, показали, что решения для $\beta < \infty$ также должны характеризоваться топологическим зарядом. В настоящей работе показано, что решение Е. Виттена /2/ может быть обобщено на случай $\beta < \infty$. Аналогично может быть обобщено и решение Хуфта /3/. Для полноты приведен вывод решения Е. Виттена /2/.

2. Уравнения дуальности имеют вид /I/:

$$F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}, \qquad \text{(I)}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu],$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = (1/2)\varepsilon_{\mu\nu\pi\rho}F_{\pi\rho},$$

$$A_\mu = A_\mu^i \sigma_i, \quad \sigma_i \text{ - матрицы Паули.}$$

Условие периодичности: $A_\mu(r,t+\beta) = A_\mu(r,t)$.

Наиболее общий вид цилиндрически симметричного поля A_μ таков:

$$A_i^a = \frac{\Phi_2 + 1}{r^2}\,\varepsilon_{iak}x_k + \frac{\Phi_1}{r^3}\,(\delta_{ia}r^2 - x_i x_a) + A_1\,\frac{x_i x_a}{r^2},\ i = 1,2,3;$$

$$A_0^a = A_0 x_a/r. \tag{2}$$

Для таких A_μ уравнения (I) принимают вид:

$$\begin{cases} \partial_0\Phi_1 + A_0\Phi_2 = \partial_1\Phi_2 - A_1\Phi_1, \\ \partial_1\Phi_1 + A_1\Phi_1 = -(\partial_0\Phi_2 - A_0\Phi_1), \\ r^2(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) = 1 - \Phi_1^2 - \Phi_2^2, \end{cases} \tag{3}$$

где $\partial_0 \equiv \partial/\partial t$, $\partial_1 \equiv \partial/\partial r$.

После задания калибровочного условия $\partial_0 A_0 + \partial_1 A_1 = 0$ можно ввести функцию ψ, такую, что $A_0 = \partial_1\psi$, $A_1 = -\partial_0\psi$ и первые два уравнения в (3) примут вид

$$[\partial_0 - (\partial_0\psi)]\Phi_1 = [\partial_1 - (\partial_1\psi)]\Phi_2,$$

$$[\partial_1 - (\partial_1\psi)]\Phi_1 = -[\partial_0 - (\partial_0\psi)]\Phi_2.$$

После замены $\Phi_i = \chi_i \exp\psi$ они превращаются в уравнения Коши-Римана

$$\partial_0\chi_1 = \partial_1\chi_2,$$

$$\partial_1\chi_1 = -\partial_0\chi_2,$$

то есть функция $f = \chi_1 - i\chi_2$ должна быть аналитической функцией от $z = r + it$.

Последнее уравнение в (3) имеет вид

$$-r^2\partial_\alpha\partial_\alpha\psi = 1 - f^*f\cdot\exp 2\psi. \tag{4}$$

После замены $\psi = \ln r - \frac{1}{2}\ln|f|^2 + \rho$, в предположении, что f не имеет нулей, уравнение (4) превращается в уравнение Лиувилля:

$$\partial_\alpha \partial_\alpha \rho = \exp 2\rho.$$

Решения этого уравнения имеют вид

$$\rho(z) = -\ln[(1 - g^* g)/2] + (1/2)\ln|dg/dz|^2,$$

где $g(z)$ – произвольная аналитическая функция.

С точностью до калибровочного преобразования $f \to fh$, $\psi \to \psi - \ln|h|$, где h – аналитическая функция, не имеющая нулей, решение уравнения (4) есть

$$\psi = \ln[(1 - g^* g)/2r], \quad f = dg/dz. \qquad (5)$$

Для регулярности $\bar{\psi}$ необходимо, чтобы:

$$|g| = 1 \quad \text{при} \quad r = 0, \qquad |g| < 1 \quad \text{при} \quad r > 0. \qquad (6)$$

3. Кроме того, мы хотим, чтобы $g(z) = g(z + i\beta)$. Сделаем замену аргумента $z \to v = \exp(-2\pi z/\beta)$. Условия (6) перейдут при этом в следующие:

$$|g(v)|\Big|_{|v|=1} = 1, \quad |g(v)|\Big|_{|v|<1} < 1. \qquad (7)$$

Теперь ясно, что аналитические функции $g(v)$, отображающие единичный круг на единичный круг, задают желаемые решения. Всякая такая функция $g(v)$ имеет вид

$$g(v) = \exp i\alpha \prod_{k=1}^{N} (a_k v + b_k)/(b_k^* v - a_k^*), \qquad (8)$$

где $|a_k|^2 + |b_k|^2 = 1$ и $|b_k| < |a_k|$. Топологический заряд такого решения равен N.

4. Решение Хуфта имеет вид /3/:

$$A_\mu^a = c_{a\mu\nu} \partial_\nu \ln F, \qquad (9)$$

где $c_{a\mu\nu}$ – некоторые константы, а F равно

$$F = 1 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k/(x - x_k)^2. \qquad (10)$$

Периодические по t решения получатся, если F взять в виде

$$F = 1 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \left[(\vec{x} - \vec{x}_k)^2 + (t - t_k + n\beta)^2 \right]^{-1},$$

то есть

$$F = 1 + \beta \sum_{k=1}^{N} \alpha_k |\vec{x} - \vec{x}_k|^{-1} \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi}{\beta} |\vec{x} - \vec{x}_k| \right) \times$$

$$\times \left[\cos \frac{2\pi}{\beta} (t - t_k) - \operatorname{ch} \frac{2\pi}{\beta} |\vec{x} - \vec{x}_k| \right]^{-1}. \qquad (11)$$

5. При вычислении статистической суммы

$$Z(\beta) = \int \exp\left(- g^{-1} \int_0^{\beta} dt \int d^3x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) dA \qquad (12)$$

методом перевала оказывается, что вклад решений классических уравнений Янга-Миллса, являющихся точками перевала, не зависит от β, так как показатель экспоненты в (12) равен для этих решений с точностью до постоянного множителя топологическому заряду N этих решений.

Для того, чтобы статистическая сумма (12) нетривиальным образом зависела от β, необходимо ввести кроме β еще какой-нибудь размерный параметр. Этот параметр может появиться либо после введения материи в теорию массивных полей, либо при введении точки нормировки при перенормировке квантовых поправок к $Z(\beta)$. Это будет сделано в другой работе.

Автор благодарен Е. С. Фрадкину за постановку задачи и ценные обсуждения.

Замечание. После завершения этой работы я узнал о работе Б. Харрингтона и Г. Шепарда /5/, в которой получены периодические решения уравнений дуальности (1) на основе решений Хуфта /3/.

При вычислении $Z(\beta)$ в качестве еще одного размерного параметра в /5/ взят объем обрезанного пространства V. При этом после предельного перехода $V \to \infty$ нетривиальная зависимость термодинамических функций от температуры пропадает.

Поступила в редакцию
20 октября 1977 г.

Л и т е р а т у р а

1. A. Belavin et al., Phys. Lett. 59B, 85 (1975).
2. E. Witten, Phys. Rev. Lett., 17, 121 (1977).
3. G. 't Hooft, unpublished.
4. B. Harrington and H. Shepard, preprint, university of New Hampshire, USA, 1976.
5. B. Harrington and H. Shepard, preprint, university of New Hampshire, USA, 1977.