Краткие сообщения по физике № 1 1978

ОКТАВНАЯ ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА, ДИРАКА И ЯНГА-МИЛЛСА

С. Е. Конштейн

УДК 530.I45

Приведена единообразная запись уравнений Максвелла, Дирака и Янга-Миллса с помощью неассоциативной алгебры октав. Показано, что решение Хуфта уравнения антидуальности для поля Янга-Миллса имеет в октавной записи вид чистой калибровки.

В последнее время возник интерес к теориям поля,в которых пространство состояний описывается с помощью октав /I/. Хотя такие теории еще фактически не созданы, построены калибровочные модели единого взаимодействия, основанные на исключительных группах, которые допускают реализацию в терминах октав /2/. При этом обычно предполагают, что эти модели можно строить и непосредственно при помощи октавных полей. Этот интерес обусловлен надеждой получить унитарность матрицы рассеяния в бесцветном секторе уже на кинематическом уровне из-за особых правил перемножения октав. Цветную группу $SU^c(3)$ при таких рассмотрениях считают подгруппой группы автоморфизмов октав G_2. Если же обратить внимание на другую подгруппу этой группы - $\widetilde{SO}(4)$, то станет очевидной возможность записывать при помощи октав лоренцевы векторы и спиноры.

Алгеброй октав называется 8-мерная алгебра со следующей таблицей умножения:

$$\begin{gathered} e_0 e_\alpha = e_\alpha e_0 = e_\alpha;\ \alpha = 0,1,\ldots,7, \\ e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + E_{ijk} e_k;\ i,j,k = 1,\ldots,7, \\ E_{ijk} = E_{jki} = -E_{jik}, \\ E_{123} = E_{147} = E_{257} = E_{367} = E_{165} = E_{246} = E_{354} = 1. \end{gathered} \tag{I}$$

Алгебра октав является альтернативной, т.е. для ассоциатора любых трех ее элементов $\{x,y,z\} = (xy)z - x(yz)$ имеют место равенства /3/:

$$\{x,y,z\} = \{y,z,x\} = -\{y,x,z\}. \tag{2}$$

Кроме того, для каждых трех октав справедливо соотношение /3/

$$(xa)(bx) = x(ab)x. \tag{3}$$

Если некоторые из e_k согласованным образом заменить на ie_k, то равенства (2) и (3) останутся в силе.

Для каждой октавы $x = x_o e_o + x_k e_k$ можно ввести сопряженную октаву $\bar{x} = x_o e_o - x_k e_k$ и модуль $|x|^2 = x\bar{x} = x_o^2 + \Sigma x_k^2$.

Алгебра, базисом которой служат e_0, e_1, e_2 и e_3, является алгеброй кватернионов.

Группа автоморфизмов октав, то есть таких отображений октав в себя $x \to x'$, что $(\alpha x + \beta y)' = \alpha x' + \beta y'$ и $(xy' = x'y'$, является исключительной группой G_2. Подгруппа этой группы, которая переводит кватернионы в кватернионы, есть группа $SO(4)$. На подпространстве, натянутом на векторы e_4, e_5, e_6 и e_7, действует четырехмерное представление этой группы. Поэтому можно считать, что $u_\mu = (ie_7, e_4, e_5, e_6)$ является Лоренц-инвариантным объектом.

Рассмотрим теперь следующие Лоренц-инвариантные октавы:

пространственную координату	$x = u_\mu x_\mu$,	(4_x)
дифференцирование по ней	$\nabla = u_\mu \partial_\mu$,	(4_∇)
электромагнитный потенциал	$A = u_\mu A_\mu$,	(4_A)
ток	$J = u_\mu J_\mu$,	(4_J)
напряженность электромагнитного поля	$F = F_{\mu\nu} u_\mu u_\nu$.	(4_F)

Суммирование в приведенных определениях ведется с обычной сигнатурой $(+,-,-,-)$.

Несложно с помощью правил умножения (I) проверить, что в лоренцевой калибровке $\partial_\mu A_\mu = 0$ имеет место тождество

$$\nabla A = F, \tag{5}$$

и что уравнение

$$\nabla F = J \tag{6}$$

эквивалентно уравнениям Максвелла.

Если же из спинора

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 + i\psi_2 \\ \psi_3 + i\psi_4 \\ \varphi_2 + i\varphi_1 \\ \varphi_4 + i\varphi_3 \end{bmatrix}$$

составить октаву

$$\begin{aligned} \Psi = {} & e_0(\psi_1 - i\varphi_1) - e_1(\psi_2 + i\varphi_2) - e_2(\psi_1 + i\varphi_1) - \\ & - e_3(\psi_2 - i\varphi_2) - e_4(\psi_4 + i\varphi_4) - e_5(\psi_3 + i\varphi_3) - \\ & - e_6(\psi_4 - i\varphi_4) - e_7(\psi_3 - i\varphi_3), \end{aligned} \tag{7}$$

то уравнение

$$[i(\nabla + A) - m]\Psi = 0 \tag{8}$$

эквивалентно паре уравнений: уравнению Дирака его сопряженному.

Рассмотрим теперь поле Янга-Миллса в эвклидовой области. Уравнение антидуальности для него имеет вид /4/:

$$F_{\mu\nu} + F^{*}_{\mu\nu} = 0, \tag{9}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$, $F^{*}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$, $A_\mu = A^{1}_{\mu}\sigma_1$.

В случае группы SU(2), который и будет рассматриваться, σ_1 – матрицы Паули. Записать уравнение (9) в октавах можно, используя SO(4)-инвариантный объект $u_\mu = (e_7, e_4, e_5, e_6)$. Так как теперь рассматривается эвклидова область, то в множителе i при e_7 отпала необходимость. Уравнение антидуальности в октавах имеет вид

$$\nabla A + A^2 = \overline{\nabla A + A^2}, \qquad (10)$$

где ∇ и A определены формулами (4), в которых суммирование также эвклидовское, то есть с сигнатурой (+, +, +, +).

Решение Хуфта /5/ уравнения (9) можно получить, если искать решения уравнения (10), имеющие вид чистой калибровки:

$$A = (\nabla \exp f_1(x) A_0) \exp(-f_1(x) A_0) = A_0 \nabla f(x),$$

$$A_0 = \sum_{i=1}^{3} e_i \sigma_i, \qquad (11)$$

где $f_1(x)$ – некоторая скалярная функция, а $f = (3/8)\exp 2f_1 + (1/8)\exp(-2f_1) + f_1/2$.

В силу (2) имеет место равенство $\nabla A = -\Delta f A_0$. Так как $\nabla f A_0 = -A_0 \nabla f$, то $A^2 = -(\nabla f A_0)(A_0 \nabla f)$, а это в силу (3) равно $-\nabla f (A_0 A_0) \nabla f = -3\nabla f \nabla f - 2\nabla f A_0 \nabla f$. Поэтому уравнение (10) приобретает вид $-\Delta f + 2\nabla f \nabla f = 0$, или, после замены $f = (1/2)\ln F$, $F^{-1}\Delta F = 0$. Семейство решений этого уравнения зависящее от $5N$ параметров имеет вид:

$$F = 1 + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \Big/ (x - x_k)^2. \qquad (12)$$

В заключение я благодарю Е. С. Фрадкина за ценные обсуждения.

Поступила в редакцию
24 октября 1977 г.

Литература

1. M. Günaydin and F. Gürsey, Journ. Math. Phys., 14, 1651 (1973); Phys. Rev., D9, 3387 (1974). M. Günaydin, Nuovo Cimento, 29A, 467 (1975).

2. F. Gürsey, P. Ramond and P. Sikivie, Phys. Lett., 60B, 177 (1976). F. Gürsey, P. Sikivie, Phys. Rev. Lett., 36, 775 (1976). P. Ramond, Nucl. Phys., B110, 214 (1976). E. S. Fradkin, O. K. Kalashnikov and S. E. Konstein, preprint N 166, Lebedev Inst., Moscow, USSR, 1977.
3. R. D. Schafer, An Introduction to Nonassociative Algebras, Academic Press, N.-Y., 1966. Г. Фрейденталь, Математика, I, № I, II7 (I957).
4. A. Belavin et al., Phys. Lett., 59B, 85 (1975).
5. G. 't Hooft, unpublished.