Краткие сообщения по физике № 2 1978

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В МОДЕЛИ СИЛЬНОПОГЛОЩАЮЩЕГО ЯДРА

В. И. Беляк

УДК 539.17

Получено выражение для матрицы рассеяния и сечения ядерных реакций с заряженными частицами, исходя из квазиклассических зависящих от l граничных условий на поверхности ядра, соответствующих сильнопоглощающему прямоугольному потенциалу. Предложенное описание является развитием модели Блатта-Вайскопфа для вычисления сечения образования составного ядра.

В монографии /I/ для вычисления сечения ядерных реакций с заряженными частицами (интерпретируемого как сечение образования составного ядра) была предложена модель, которую мы будем называть моделью Блатта-Вайскопфа (МБВ). В МБВ используются граничные условия на поверхности ядра, соответствующие полному поглощению внутри ядерной поверхности, а именно, наличию внутри нее только сходящихся парциальных волн. При этом предполагается, что эти волны характеризуются вещественным и не зависящим от орбитального момента l внутренним волновым числом K.

В настоящей работе предложено обобщение МБВ, в котором в соответствии с наличием сильного поглощения используется комплексное K. Затем вводится зависимость внутреннего волнового числа от l (а также и от радиуса r), соответствующая квазиклассическому рассмотрению внутреннего движения для сильнопоглощающего прямоугольного потенциала. В результате получаются зависящие от l граничные условия на поверхности ядра, которые определяют матрицу рассеяния и соответственно сечение реакций.

I. Будем считать взаимодействие падающих частиц с ядром при $r>R$ чисто кулоновским и в соответствии с этим исходить из выражения матрицы рассеяния S_l через логарифмическую производную f_l внутренней волновой функции $\chi_l(r) = r\mathcal{R}_l(r)$ при $r = R$ (см., напр., /I/)

$$S_l = \frac{f_l - \Delta_l + is_l}{f_l - \Delta_l - is_l}\exp(2i\xi_l), \quad f_l = R\,\frac{\chi_l'(R)}{\chi_l(R)},$$

$$\Delta_l + is_l = R\,\frac{G_l'(R) + iF_l'(R)}{G_l(R) + iF_l(R)}, \tag{I}$$

$$\exp(2i\xi_l) = \frac{G_l(R) - iF_l(R)}{G_l(R) + iF_l(R)}\exp(2i\sigma_l),$$

$F_l(r)$ и $G_l(r)$ – регулярная и нерегулярная в нуле кулоновские функции, σ_l – кулоновская фаза рассеяния (Δ_l, s_l, ξ_l, σ_l – вещественные величины).

В МБВ используется граничное условие /I/ $f_l = -iKR$, где $K = \sqrt{k^2 + k_o^2}$, k_o – вещественная константа, k – волновое число падающих частиц.

2. Будем полагать k_o комплексной константой, которой можно сопоставить комплексный потенциал $U^{ef} = -\hbar^2 k_o^2/2m$ при $r < R$. Обобщенная таким образом модель (как и МБВ) основана на предположении о полном поглощении внутри ядерной поверхности $r = R$, а именно о наличии внутри нее только сходящихся парциальных волн $\chi_l(r) \backsim \backsim \exp(-iKr)$. При этом комплексность K приводит к затуханию этих волн при движении к центру, что согласуется с наличием поглощения, а при $\exp(-2\mathrm{Im}KR) \ll 1$ – с исходным предположением о полном поглощении внутри ядра. С другой стороны, вещественность K и следовательно отсутствие затухания сходящихся волн в МБВ означает по существу наличие в центре ядра нефизического "стока" частиц.

Таким образом, обобщенная модель (ОМ) является более последовательной, чем исходная, и граничное условие в ней имеет вид

$$f_l = -iKR \quad (\mathrm{Re}K \geqslant 0,\ \mathrm{Im}K \geqslant 0), \quad K = nk, \tag{2}$$

$n = \sqrt{1 + k_o^2/k^2} = \sqrt{1 - U^{ef}/E}$ – аналог показателя преломления, $E = \hbar^2 k^2/2m$.

Подставляя (2) в (I), получаем матрицу рассеяния S_l и далее с ее помощью сечение реакций

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \frac{4\mathrm{Re}\, nkRs_l}{(\mathrm{Re}\, nkR + s_l)^2 + (\mathrm{Im}\, nkR - \Delta_l)^2}. \qquad (3)$$

Формула (3) переходит в соответствующее выражение МБВ /I/ при $(\mathrm{Im}\, n)^2 \ll (\mathrm{Re}\, n)^2$. Это условие совместно с условием затухания $\exp(-2\mathrm{Im}\, nkR) \ll 1$ определяет область значений $\mathrm{Im}\, n$, при которых может быть справедлива МБВ.

При $\mathrm{Im}\, n \to \infty$ (или $\mathrm{Im}\, n^2 \to \infty$) согласно (3) имеем $\sigma_r \to 0$. Это означает, что в ОМ учитывается эффект отражения, связанный с мнимой частью потенциала U^{ef} /2/.

В случае отсутствия кулоновского взаимодействия и при $kR \gg 1$ в (3) можно воспользоваться рассмотренным ниже приближением (9) для Δ_l, s_l и заменить суммирование на интегрирование. При этом имеем

$$\sigma_r = \pi R^2 \bar{T}^{ef},$$
$$\bar{T}^{ef} = 8\mathrm{Re}\, n \left\{ 1 - 2\mathrm{Re}\, n \ln \left| 1 + \frac{1}{n} \right| + \frac{\mathrm{Re}\, n^2}{\mathrm{Im}\, n} \mathrm{arctg} \frac{\mathrm{Im}\, n}{|n^2| + \mathrm{Re}\, n} \right\}. \qquad (4)$$

3. Перейдем к последовательно потенциальному описанию рассеяния при наличии сильного поглощения. Будем полагать, что потенциал взаимодействия $U(r)$ представляет сумму прямоугольного комплексного потенциала глубины $V_o + iW_o = -U_o$ радиуса R и потенциала кулоновского взаимодействия $u_c(r)$. Для простоты будем считать, что $u_c(r) = u_c(R)$ при $r \leqslant R$ [*]. Введем величины $U = U_o + u_c(R)$, $n = \sqrt{1 - U/E}$ $(\mathrm{Re}\, n \geqslant 0,\ \mathrm{Im}\, n \geqslant 0)$.

Для такого потенциала при $r < R$ имеем $\chi_l(r) = C_l r j_l(nkr)$.

Далее будем считать, что вблизи поверхности $r = R$ эта внутренняя волновая функция а) становится квазиклассической, б) содержит только сходящуюся волну. Для этого необходимо, чтобы

$$\text{а)}\ |n| kR \gg 1, \qquad \text{б)}\ \exp(-2\mathrm{Im}\, nkR) \ll 1. \qquad (5)$$

---

[*] В рассматриваемом ниже приближении учет отклонения $u_c(r)$ от $u_c(R)$ при $r < R$ не изменит полученных результатов.

В указанном приближении логарифмическая производная f_l выражается через значение квазиклассического внутреннего волнового числа

$$K(r,\lambda) = \sqrt{n^2k^2 - \lambda^2/r^2}$$

$$(\mathrm{Re}K \geqslant 0, \quad \mathrm{Im}K \geqslant 0, \quad \lambda \equiv l + 1/2)$$

на поверхности $r = R$ аналогичным (2) образом

$$f_l = - iK(R,\lambda)R = - i\sqrt{(nkR)^2 - \lambda^2}$$

$$(\mathrm{Re}\, f_l \geqslant 0, \ \mathrm{Im}\, f_l \leqslant 0). \tag{6}$$

Рассматриваемое приближение описывает частичное отражение падающей волны от поверхности $r = R$ и полное поглощение прошедшей внутрь нее волны. Поэтому это приближение можно назвать моделью черного ядра с отражением (МЧЯО). Укажем, что оно может быть справедливо и при достаточно большом отталкивании ($\mathrm{Re}\, U > E$, см. (5)), из-за которого падающий поток не проникает внутрь поверхности $r = R$. Отметим, что в основные соотношения (5) и (6) входит глубина потенциала, включающего кулоновское отталкивание.

Матрица рассеяния, соответствующая граничным условиям (6), имеет вид

$$S_l = \frac{\sqrt{(nkR)^2 - \lambda^2} - i\Delta_l - s_l}{\sqrt{(nkR)^2 - \lambda^2} - i\Delta_l + s_l} \exp(2i\xi_l). \tag{7}$$

Отсюда для сечения реакций получаем

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{8\lambda\, \mathrm{Re} \sqrt{(nkR)^2 - \lambda^2}\; s_l}{(\mathrm{Re} \sqrt{(nkR)^2 - \lambda^2} + s_l)^2 + (\mathrm{Im} \sqrt{(nkR)^2 - \lambda^2} - \Delta_l)^2}. \tag{8}$$

При $W_o \to \infty$ (так же как и при $|V_o| \to \infty$) согласно (8) имеем $\sigma_r \to 0$. Это является следствием эффекта отражения от ядерной поверхности /2/.

В случае отсутствия кулоновского взаимодействия и квазиклассичности внешнего движения ($kR \gg 1$) полезно иметь в виду приближенные соотношения для Δ_l, s_l, ξ_l, которые, в частности соответствуют пренебрежению подбарьерным прохождением частиц,

$$\Delta_l + is_l = i\sqrt{(kR)^2 - \lambda^2} \quad (\Delta_l \leqslant 0,\ s_l \geqslant 0),$$

$$\xi_l = -\sqrt{(kR)^2 - \lambda^2} + \lambda \arccos \frac{\lambda}{kR} - \frac{\pi}{4} \quad \text{при} \quad \lambda < kR, \tag{9}$$

$$\xi_l = 0 \quad \text{при} \quad \lambda > kR.$$

При этом обычная модель черного ядра без отражения получается при использовании приближения (9) в s_l (7) с последующим переходом к пределу при $n^2 \to 1$.

Подставляя (9) в (8) и заменяя суммирование на интегрирование (что в целом приводит к пренебрежению величинами порядка $(kR)^{-2/3}$), получим

$$\sigma_r = \pi R^2 \bar{T}, \quad \bar{T} = 1 - 2\int_0^1 \left| \frac{\sqrt{n^2 - x^2} - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{n^2 - x^2} + \sqrt{1 - x^2}} \right|^2 x\,dx. \tag{10}$$

Этот результат совпадает с полученным в предшествующей работе /2/, в которой приведено и явное выражение для коэффициента прохождения $\bar{T}$.

4. Рассмотрим связь между ОМ (п. 2) и МЧЯО (п. 3). В ОМ эффективное взаимодействие U^{ef} при $r < R$ является по-существу потенциалом для радиального движения, т.е. включает в себя центробежную энергию. В МЧЯО центробежная энергия выделена из потенциала и последовательно учтена. В этом смысле МЧЯО можно считать дальнейшим развитием ОМ. Граничные условия МЧЯО (6) при $l = 0$ переходят в граничные условия ОМ (2) с $U^{ef} = U$, а при $l = 0$ и в пределе вещественного потенциала притяжения – в граничные условия МБВ. В соответствии с этим отличие МЧЯО от ОМ (а следовательно, и от МБВ) должно становиться более существенным с ростом энергии E падающих частиц. При относительно небольших энергиях (скажем, $E < u_c(R)$ или $E \ll |U_0|$) в первом приближении при вычислении

σ_r, по-видимому, можно ограничиться ОМ или даже МБВ. При этом следует иметь в виду, что ОМ не только учитывает отражение, связанное с $\mathrm{Im}U^{ef}$, но и позволяет рассматривать случаи $\mathrm{Re}U^{ef} > 0$, которые (как это видно из МЧЯО) могут иметь место при достаточно больших зарядах сталкивающихся частиц.

В случае $u_c(r) = 0$, $kR \gg 1$ сравним непосредственно сечения реакций в ОМ (4) и МЧЯО (10) (т. е. сравним $\bar{T}^{ef}$ и $\bar{T}$), полагая $\bar{U}^{ef} = \bar{U}$. При $|n^2| \approx |U/E| \gg 1$ выражения для $\bar{T}^{ef}$ и $\bar{T}$ приближенно совпадают. В пределе вещественного потенциала притяжения ($n = \mathrm{Re}\, n > 1$), когда $\bar{T}^{ef}$ соответствует МБВ, причем

$$\bar{T}^{ef} = 8n\left[(2n + 1)/(n + 1) - 2n \ln(1 + 1/n)\right],$$

$$\bar{T} = (4/3)(2n + 1)/(n + 1)^2,$$

величина $\bar{T}^{ef}$ оказывается меньше $\bar{T}$ (с ростом n разность $\bar{T} - \bar{T}^{ef}$ уменьшается).

Модель Блатта-Вайскопфа неоднократно использовалась для описания данных о сечениях реакций с тяжелыми ионами. Можно ожидать, что ее обобщение (п.2) и дальнейшее развитие (п. 3) позволит распространить это описание на более широкие области энергий и зарядов ионов.

Автор благодарит Г. М. Ваградова и В. А. Сергеева за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
5 декабря 1977 г.

Литература

1. Дж. Блатт, В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954 г.
2. В. И. Беляк, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 9, 14 (1977).