Краткие сообщения по физике № 2 1978

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ИНВАРИАНТЫ ГРУПП SU_n В ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ S_N

В. П. Карасев, Л. А. Шелепин

УДК 530.I

Ортонормированные базисы непроводимых представлений групп реализованы как производящие инварианты для коэффициентов Клебша-Гордана N-го ранга групп SU_n. Это открывает новые возможности в аппарате представлений групп S_N, SU_n в анализе многочастичных систем.

Симметрическая группа S_N играет существенную роль в анализе сложных (многочастичных) физических систем различной природы /I-3/. Известна также тесная взаимосвязь между представлениями групп S_N и SU_n /4/, которая широко используется как в разработке математического аппарата этих групп, так и при анализе взаимосвязей различных физических симметрий (см., например, /2-5/). В последнее время в построении необходимого для физических приложений аппарата групп SU_n оказался плодотворным метод производящих инвариантов (ПИ); в частности, в его рамках была развита методика рекуррентного определения произвольных величин алгебр Вигнера-Рака групп SU_n /6,7/.

Цель настоящей работы состоит в демонстрации возможности эффективного использования ПИ групп SU_n в решении физически важных вопросов теории представлений групп S_N – построении (в явном виде) базисов и матриц преобразований неприводимых представлений (НП).

Исходным пунктом данного рассмотрения является редукция тензорного произведения R^N преобразующихся по НП $D(10\ldots0)SU_n$ "одночастичных" пространств $R_i \sim R$ ($\sim$ – символ "трансформационного" изоморфизма пространств, i – нумерующий их индекс) в прямую сумму неприводимых относительно группы $SU_n \times S_N$ подпространств: $R^N = \sum\limits_{\langle f_i\rangle} R^{\langle f_i\rangle}$ ($\langle f_i\rangle \equiv \langle f_1\ldots f_n\rangle$ – сигнатуры схем Юнга /4/, индексирующие одновременно НП S_N и SU_n). Эта редукция осуществляется с помощью унитарной матрицы S, связывающей компоненты тензорного базиса $\left\{|m_1\ldots m_N\rangle \equiv \prod_{i=1}^{N} |m_i\rangle\,(i)\right\}$ в R^N и ортонормированного базиса $\{|\langle f_i\rangle;(M);(Y)\rangle \sim |\{p_i\};(M)\rangle|\langle f_i\rangle;(Y)\rangle\}$ в $\Sigma R^{\langle f_i\rangle}$ /8,3/:

$$|\langle f_i\rangle;(M);(Y)\rangle = \sum_{\{m_i\}} S\begin{pmatrix}\langle f_i\rangle;(M);(Y)\\ m_1\ \ldots\ m_N\end{pmatrix}|m_1\ldots m_N\rangle,$$

$$S \equiv \left\| S\begin{pmatrix}\langle f_i\rangle;(M);(Y)\\ m_1\ \ldots\ m_N\end{pmatrix}\right\|, \tag{I}$$

где $\{|m_i\rangle(i)\}$ – однотипные ортонормированные базисы R_i; $\{|\{p_i\};(M)\rangle\}$ и $\{|\langle f_i\rangle;(Y)\rangle\}$ – ортонормированные базисы НП $D(\{p_i\})$ SU_n и $\langle f_i\rangle$ S_N соответственно $(p_i = f_i - f_{i+1})$. Элементы матрицы S – $S\left(\begin{smallmatrix}\cdots\\ \cdots\end{smallmatrix}\right)$ (названные в /8/ S-коэффициентами) являются относительно преобразований группы SU_n коэффициентами Клебша-Гордана (ККГ) N-го ранга, причем сложный индекс (Y) различает SU_n – эквивалентные ККГ. Поэтому для них можно обычным образом /6/ определить ортонормированные ПИ SU_n

$$\mathcal{Y}^{\langle f_i\rangle}_{(Y)}(x_1,\ldots x_N;y_1,\ldots y_{n-1}) \equiv$$

$$\equiv \sum_{\substack{\{m_i\}\\ M,\bar{M}}} S\begin{pmatrix}\langle f_i\rangle;(M);(Y)\\ m_1\ \ldots\ m_N\end{pmatrix}\prod_{i=1}^{N}|m_i\rangle(x_i)\begin{pmatrix}\{p_i\}\\ (M)\end{pmatrix}\begin{vmatrix}\{\bar{p}_i\}\\ (\bar{M})\end{pmatrix}\times \tag{2}$$

$$\times|\{p_i\};(M)\rangle(y_1,\ldots,y_{n-1}),$$

где базисы $\{|m_i\rangle(x_i)\}$, $\{|\{p_i\};(M)\rangle(y_1,\ldots,y_{n-1})\}$ реализованы соответственно в функции от векторов $x_i \in R_i$, $y_k \in C_k \sim R$; $\begin{pmatrix}\{p_i\}\\ (M)\end{pmatrix}\begin{vmatrix}\{\bar{p}_i\}\\ (\bar{M})\end{pmatrix}$ – метрический тензор SU_n; $\{\bar{p}_i\}$ – сигнатура (а $(\bar{M})$ – нумерующие числа компонент базиса) контраградиентного к $D(\{p_i\})$ НП SU_n.

В соответствии с (I) набор величин (2) при фиксированной сигнатуре $\langle f_i\rangle$ образует ортонормированный базис $\{|\langle f_i\rangle;(Y)\rangle(x_1,\ldots,x_N$

НП $\langle f_i \rangle S_N$. Действие оператора $\pi(s)$ перестановки $s = \begin{pmatrix} 1 \ldots N \\ s_1 \ldots s_N \end{pmatrix}$ в этом базисе задается формулой

$$\pi(s)|\langle f_i\rangle;(Y)\rangle(x_1,\ldots,x_N) \equiv \pi(s)\, \mathfrak{z}_{(Y)}^{\langle f_i\rangle}(x_1,\ldots,x_N;y_1,\ldots,y_{n-1}) =$$

$$= \mathfrak{z}_{(Y)}^{\langle f_i\rangle}(x_{s_1},\ldots,x_{s_N};y_1,\ldots,y_{n-1}) \equiv |\langle f_i\rangle;(Y)\rangle(x_{s_1},\ldots,x_{s_N}), \quad (3)$$

а его матричные элементы $\langle (Y)|\pi(s)|(Y')\rangle$ вычисляются с помощью определенного в /6,7/ скалярного произведения для ПИ SU_n следующим образом:

$$\langle (Y)|\pi(s)|(Y')\rangle = N^2(\{p_i\})\, \mathfrak{z}_{(Y)}^{\langle f_i\rangle}(\bar{x}_1,\ldots\bar{x}_N;\bar{y}_1,\ldots\bar{y}_{n-1}) \times$$

$$\times\, \mathfrak{z}_{(Y')}^{\langle f_i\rangle}(x_{s_1},\ldots,x_{s_N};y_1,\ldots,y_{n-1}), \quad p_i = f_i - f_{i+1}, \quad (4)$$

где $\bar{x}_i \equiv (\bar{x}_{ik}) = (\partial/\partial x_{ik})$; $\quad N^2(\{p_i\}) = \left[\prod_{m=1}^{n-1}\prod_{k=0}^{m-1}\left(\sum_{i=m-k}^{m} p_i + k\right)^{(p_m)}\right]^{-1}$ – нормировочный множитель /7/.

Практическое нахождение ПИ $\mathfrak{z}_{(Y)}^{\langle f_i\rangle}(\ldots)$ связано с конкретным проведением редукции $R^N = \sum R^{\langle f_i\rangle}$. Зафиксируем, например, выражающую последовательное связывание одночастичных пространств R_i схему редукции: $R^N = (\ldots((R_1 \times R_2)\times R_3)\ldots R_N)$. Ей отвечает индуктивное построение ПИ (2) (при $N>2$) с помощью ПИ для ККГ SU_n вида $\left(\begin{matrix}\{p_i'\} \\ \ldots\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}1\ 0\ldots0 \\ \ldots\end{matrix}\,\middle\|\,\begin{matrix}\{p_i\} \\ \ldots\end{matrix}\right)$. Точный вид последних найден в работе /7/. Тогда, используя методику /6/, получаем (в обозначениях /6,7/) следующие явные выражения для ПИ SU_n и одновременно для базиса НП $\langle f_i\rangle S_N$:

$$\mathfrak{z}^{\langle f_i \rangle}_{(Y)}(x_1,\dots x_N;y_1,\dots y_{n-1}) = \prod_{\alpha=1}^{N-2} N^2(\{p_i^\alpha\})N^2(\{\bar{p}_i^\alpha\}) \times$$

$$\times\,[\dim\{p_i^\alpha\}]^{1/2}\, \mathfrak{z}_{\{p_i^\alpha\}}(\bar{y}_1^\alpha,\dots,\bar{y}_{n-1}^\alpha;\bar{z}_1^\alpha,\dots\bar{z}_{n-1}^\alpha)\, \mathfrak{z}^{\{u_i^{\alpha+1}\}}_{\{p_i^\alpha\};1} \times$$

$$\times\left(z_1^\alpha,\dots,z_{n-1}^\alpha;x_{\alpha+2};y_1^{\alpha+1},\dots,y_{n-1}^{\alpha+1}\right)\mathfrak{z}^{\{u_i^1\}}_{1;1}(x_1;x_2;y_1^1,\dots,y_{n-1}^1) =$$

$$= |\langle f_i \rangle;(Y)\rangle(x_1,\dots x_N),\quad y_i^{N-1} \equiv y_i,$$

$$\dim\{p_i^\alpha\} = \left[\prod_{m=1}^{n-1}\prod_{k=1}^{n-m}\left(\sum_{j=0}^{k-1} p_{j+m}^\alpha + k\right)\Big/\prod_{l=1}^{n-1} l!\right], \tag{5}$$

где индексу (Y) соответствует набор сигнатур $\{p_i^\alpha\}$ промежуточных НП SU_n; нормировочные множители $N^2(\{p_i^\alpha\})$ задаются так же, как в (4); фактор-инварианты $\mathfrak{z}^{\{u\}}_{\{p\};1}(\dots;x_{\alpha+2};\dots)$ определены в /7/, а фактор-инварианты $\mathfrak{z}_{\{p\}}(\bar{y}_1^\alpha,\dots;\bar{z}_1^\alpha,\dots)$ – с помощью формулы

$$\mathfrak{z}_{\{p_i^\alpha\}}(\bar{y}_1^\alpha,\dots;\bar{z}_1^\alpha,\dots) = \prod_{i=1}^{n-1}\left[\bar{z}_1^\alpha\dots\bar{z}_i^\alpha\bar{y}_1^\alpha\dots\bar{y}_{n-i}^\alpha\right]^{p_i^\alpha}, \tag{6}$$

$$[z_1\dots z_i y_1\dots y_{n-i}] \equiv \sum \varepsilon_{k_1\dots k_n} z_{1\,k_1}\dots z_{i\,k_i} y_{1\,k_{i+1}}\dots y_{n-i\,k_n}.$$

Отметим, что выбранная здесь схема связи $(\dots((1\ 2)3)\dots N)$ одночастичных пространств соответствует правильному размещению номеров i $(i = 1,2,\dots,N)$ в стандартных таблицах Юнга /2/. Поэтому построенный базис НП S_N эквивалентен по трансформационным свойствам базису Яманучи /2,9/. Другие схемы связи R_i приведут к отличным от (5) базисам НП S_N; связь между ними, очевидно, будет выражаться с помощью трансформационных матриц групп SU_n (аналогов $3nj$-символов в теории угловых моментов /10/).

Таким образом, представление ПИ открывает ряд новых возможностей теоретического и прикладного планов для группы S_N. Так, с помощью формул (3) – (5) можно задавать в явном виде действие и вычислять матричные элементы различных (зависящих от $\pi(s)$) операторов групп S_N, применяемых в теории и физических приложениях /I,2/. (Отметим при этом, что факторизованная форма ПИ (5) может существенно упростить проведение конкретных вычислений). С помощью формулы (4,5) работы /6/ по ПИ (5) можно находить S-коэффициенты в произвольных базисах SU_n (отвечающих разным цепочкам подгрупп $SU_n \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_r = SU_r$ /3/). Получаемое таким образом дифференциально-инвариантное представление S-коэффициентов сводит вычисление различных сумм произведений этих коэффициентов к операциям над ПИ; например, имеем:

$$\sum_{\{m_1,\ldots m_{N-2}\}} S\begin{pmatrix} \langle f_i\rangle;(M);(Y) \\ m_1\ldots m_N \end{pmatrix} S\begin{pmatrix} \langle \tilde{f}_i\rangle;(\tilde{M});(\tilde{Y}) \\ m_1\ldots m_{N-2} \end{pmatrix} =$$

$$= N^2(\{p_i\})N^2(\{\tilde{p}_i\})|m_{N-1}\rangle(\bar{x}_{N-1})\times$$

$$\times |m_N\rangle(\bar{x}_N)\,|\{\tilde{p}_i\};(\tilde{M})\rangle(\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_{n-1})\,|\{p_i\};(M)\rangle(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_{n-1})\times$$

$$\times \tilde{\mathcal{J}}^{\langle\tilde{f}_i\rangle}_{(\tilde{Y})}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{N-2};\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})\mathcal{J}^{\langle f_i\rangle}_{(Y)}(x_1,\ldots,x_N;a_1,\ldots,a_{n-1}). \quad (7)$$

Отождествляя в (5) некоторые наборы переменных x_i, можно получать, с одной стороны, разнообразные соотношения для S-коэффициентов (ср. /3/), а с другой – ПИ для ККГ SU_n низших рангов, но более общего вида, чем $\begin{pmatrix} \{p_i'\} & 1\ 0\ldots 0 & \{p_i\} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$. Предлагаемый подход представляется также перспективным и для развития других аспектов теории S_N, в частности, вычисления ККГ (ср. /II/).

Поступила в редакцию
7 декабря 1977 г.

Л и т е р а т у р а

1. В. Г. Неудачин, Ю. Ф. Смирнов, Нуклонные ассоциации в легких ядрах, "Наука", М., 1969 г; В. Ванагас, Алгебраические методы в теории ядра, "Минтис", Вильнюс, 1971 г.
2. М. Хамермеш, Теория групп и ее применение к физическим проблемам, "Мир", М., 1968 г; Б. Джадд, Б. Вайборн, Теория сложных атомных спектров, "Мир", М., 1973 г.
3. Л. А. Шелепин, Труды ФИАН, 70, 3 (1973); В. П. Карасев, там же, с. 147.
4. Г. Вейль, Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, М., 1947 г.
5. G. E. Baird, L.C. Biedenharn, J. Math. Phys., 4, 1449 (1963); J. D. Louck, Amer. J. Phys., 38, 3 (1970); J. J. Sullivan, J. Math. Phys., 14, 387 (1973), 16, 1707 (1975); С. И. Алишаускас, Литов.физ.сб., 12, 211 (1972).
6. В. П. Карасев, П. П. Карасев, Л. А. Шелепин, ТМФ, 34, № 2 (1978).
7. В. П. Карасев, П. П. Карасев, Л. А. Щелепин, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 12, 27 (1977).
8. В. П. Карасев, Л. А. Шелепин, Препринт ФИАН, № 33, 1969 г.
9. T. Yamanouchi, Phys.-Math. Soc. Japan., 19, 436 (1937).
10. А. П. Юцис, И. Б. Левинсон, В. В. Ванагас, Математический аппарат теории момента количества движения, ГИПНЛ Лит. ССР, Вильнюс, 1960 г.
11. А.-А. А. Юцис, Некоторые вопросы теории представлений групп S_n и SL(k), Канд. диссертация, Вильнюс, 1970 г.