Краткие сообщения по физике № 3 1978

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МОДЕЛИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Л. И. Гудзенко, Г. М. Гуро

УДК 50I

Обсуждаются возможности анализа структуры пространственно распределенного объекта путем оценки параметров его простейшей модели в результате корреляционной обработки интегрального сигнала объекта.

Методы отыскания - с помощью корреляционной обработки сигнала исследуемого объекта - общего вида и параметров обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих модели с сосредоточенными параметрами, рассматривались в печати неоднократно (см., например, /I/). Когда же пространственная распределенность исследуемого явления существенна, речь должна идти о нахождении по сигналу объекта описывающего его уравнения с частными производными. На первом этапе особое внимание естественно уделить не столько обсуждению конкретных рецептов проведения статистических оценок параметров уравнения, а прежде всего постановке задачи и принципиальным возможностям ее решения. Остановимся поэтому здесь на допускающем аналитическое решение простейшем примере.

Пусть модели, одномерно распределенной на интервале $0<x<1$, соответствует линейное уравнение первого порядка с двумя постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial}{\partial t} E(x,t) + a\frac{\partial}{\partial x} E(x,t) + bE(x,t) = f(x,t) \qquad (I)$$

и краевая (или граничная) функция $E(0,t) = E_0(t)$. Интересуясь здесь только стационарной задачей, не будем учитывать вид начальных условий. Если условия эксперимента позволяют регистрировать зависимости от времени t локального сигнала $E(x_i,t)$ при двух или нескольких значениях координаты $x = x_i$, то изучение структуры распределенной модели фактически сводится к рассмотрению схемы с сосредоточенными параметрами.

Обсудим другой вариант обратной задачи, когда регистрируется только интегральный сигнал $V(t) \equiv \int\limits_0^l E(x,t)dx$ и, быть может, краевая функция $E_0(t)$. Путем их статистической обработки нужно оценить параметры модели объекта. Будем при этом полагать, что $\langle f(x,t)\rangle \equiv 0$, $\langle E_0(t)\rangle \equiv 0$, флуктуации $f(x,t)$, $E_0(t)$ и $E(x,t)$ стационарны и, кроме того, $f(x,t)$ и $E_0(t)$ стохастически независимы. Выбирая простейший пример, допустим, что локальный внутренний шум $f(x,t)$ пространственно однороден, причем его радиус корреляции мал по сравнению с длиной интервала l. В соответствии со сказанным введем следующие корреляционные функции

$$\langle V(t)V(t+\tau)\rangle \equiv \Psi(\tau); \qquad \langle E_0(t)E_0(t+\tau)\rangle \equiv \psi(\tau);$$

$$\langle f(x,t)E_0(t)\rangle \equiv 0; \qquad \langle f(x,t)f(y,t+\tau)\rangle = \delta(x-y)\varphi(\tau)$$

Решение уравнения (I), как нетрудно убедиться, имеет вид

$$E(x,t) = E_0\left(t - \frac{x}{a}\right) \exp\left(-\frac{b}{a}x\right) + \frac{1}{a}\int\limits_0^x f\left(\eta, t - \frac{x-\eta}{a}\right) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{b}{a}(x-\eta)\right] d\eta.$$

Для наблюдаемого интегрального сигнала соответственно имеем

$$V(t) = \int\limits_0^l E_0\left(t - \frac{\xi}{a}\right) \exp\left(-\frac{b}{a}\xi\right) d\xi + \frac{1}{a}\int\limits_0^l dx \int\limits_0^x f\left(\xi, t - \frac{x-\xi}{a}\right) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{b}{a}(x-\xi)\right] d\xi.$$

В линейной задаче с независимыми источниками шума корреляционная функция является суммой обусловленных ими составляющих. В нашем случае

$$\Psi(\tau) = \Psi_\psi(\tau) + \Psi_\varphi(\tau),$$

$$\Psi_\psi(\tau) = \int\limits_0^l d\xi \int\limits_0^l \psi\left(\tau + \frac{\xi - \eta}{a}\right) \exp\left[-\frac{b}{a}(\xi + \eta)\right] d\eta,$$

$$\Psi_\varphi(\tau) = \frac{1}{2ab}\int_0^1 d\xi \int_0^1 \varphi\left(\tau + \frac{\xi-\eta}{a}\right)\left\{\exp\left[-\frac{b}{a}|\xi-\eta|\right] - \right.$$

$$\left. - \exp\left[-\frac{b}{a}(\xi+\eta)\right]\right\}d\eta. \qquad (2)$$

Проведя замену переменных $\zeta \equiv \tau + (\xi - \eta)/a$, представим эти составляющие однократными интегралами

$$\Psi_\psi(\tau) = \frac{a^2}{2b}\int_{\tau-1/a}^{\tau+1/a} \psi(\zeta) \times$$

$$\times \left\{\exp\left[-b|\zeta-\tau|\right] - \exp\left[-b\left(2\frac{1}{a} - |\zeta-\tau|\right)\right]\right\}d\zeta,$$

$$(3)$$

$$\Psi_\varphi(\tau) = \frac{a}{2b}\int_{\tau-1/a}^{\tau+1/a} \varphi(\zeta)\left\{\left(\frac{1}{a} - |\zeta-\tau| - \frac{1}{2b}\right)\exp\left(-b|\zeta-\tau|\right) + \frac{1}{2b}\times\right.$$

$$\left.\times \exp\left[-b\left(\frac{2l}{a} + |\zeta-\tau|\right)\right]\right\}d\zeta.$$

В случае коротко-коррелированных во времени шумов

$$\psi(\tau) = C_\psi\delta(\tau), \qquad \varphi(\tau) = C_\varphi\delta(\tau),$$

перепишем формулы (3), вводя безразмерные величины $\theta \equiv \tau/\tau_o$, $\tau_o \equiv 1/a$, $\beta = b\tau_o$, в следующем виде:

$$\Psi_\psi(\tau) = C_\psi\frac{a^2}{2b}\left\{\exp\left[-\beta|\theta|\right] - \exp\left[-\beta(2 - |\theta|)\right]\right\}E(\theta),$$

$$\Psi_\varphi(\tau) = C_\varphi\frac{1}{2b}\left\{\left(1 - |\theta| - \frac{1}{2\beta}\right)\exp\left[-\beta|\theta|\right] + \frac{1}{2\beta}\times\right. \qquad (4)$$

$$\left.\times\exp\left[-\beta(2 + |\theta|)\right]\right\}E(\theta),$$

где

$$E(\theta) = \begin{cases} 1, & |\theta| < 1, \\ 0, & |\theta| > 1. \end{cases}$$

Из выражений (4) следует непосредственно, что если в условиях эксперимента сравнительно велик один из шумов (или краевой, или внутренний), то по корреляционной функции $\psi(\tau)$ можно оценить сначала значение сдвига τ_0, при котором эта функция обращается в нуль, а затем по виду $\psi(\tau)$ оценить безразмерный параметр β и, следовательно, коэффициент $b = \beta/\tau_0$ уравнения (I). Если длина интервала l известна, то другой коэффициент уравнения оценивается без труда $a = l/\tau_0$. Если же значение l заранее неизвестно, то для оценки его, а затем и коэффициента a необходимо знать величину, определяющую интенсивность шумов: C_φ – для краевого шума или C_φ – для внутреннего. Ситуация принципиально не изменяется и в том случае, когда вклады обоих шумов соизмеримы. Если протяженность l анализируемого пространственного распределения неизвестна, нужно обеспечить регистрацию не только интегрального сигнала $V(t)$, но и краевого шума $E_0(t)$, или, говоря точнее, обеспечить получение обеих корреляционных функций. Из формулы

$$\langle E_0(t)V(t)\rangle = a\int_0^{1/a}\psi(\eta)\exp(-b\eta)d\eta = aC_\psi/2,$$

при учете (4) получаем

$$\Psi_\psi(\tau)/\langle E_0(t)V(t)\rangle = (a/b)\left\{\exp\left[-b|\theta|\right] - \exp\left[-b(2-|\theta|)\right]\right\}E(\theta).$$

Таким образом, зная $\tau_0 = 1/a$ и b, по корреляционным функциям $\Psi(\tau)$ и $\langle E_0(t)V(t)\rangle$ можно оценить отдельно толщину распределения l и коэффициент a уравнения нашей простейшей модели объекта.

Если же протяженность l объекта велика $l \gg a/b$, то масштаб l из задачи вообще выпадает. Единственный остающийся параметр размера длины – это длина a/b, на которой затухает сигнал внутри объекта. Анализ в этом случае следует вести немного иначе. Ограничимся вариантом, когда преобладает краевой шум. Согласно первой из формул (3) получаем

$$\Psi_\psi(\tau) = (a^2/2b)\Big\{\exp(-b\tau)\int_{-\infty}^{\tau}\psi(\xi)\exp(b\xi)d\xi + \exp(b\tau)\int_{\tau}^{\infty}\psi(\xi)\times$$

$$\times\exp(-b\xi)d\xi\Big\},$$

$$\langle E_0(t)V(t)\rangle = a\int_0^{\infty}\psi(\xi)\exp(-b\xi)d\xi.$$

Если краевой шум коротко-коррелирован, то

$$\Psi_\psi(\tau) = (a^2/2b)C_\psi\exp\left[-b|\tau|\right], \quad \langle E_0(t)V(t)\rangle = aC_\psi/2,$$

и, соответственно,

$$\Psi_\psi(\tau) = (a/b)\exp\left[-b|\tau|\right]\langle E_0(t)V(t)\rangle.$$

Отсюда видно, что оценка параметров a и b в такой ситуации во всяком случае не более сложна, чем при конечной протяженности модели.

Расчет длительности регистрации сигналов (или непосредственно корреляционных функций), необходимой для получения заданной точности оценки параметров, требует, как обычно, учета аддитивных шумов, сопровождающих процесс регистрации. Такого рода рассмотрение в общем не отличается от традиционных схем математической статистики, и мы не будем здесь на нем останавливаться.

Поступила в редакцию
2 декабря 1977 г.

Литература

1. Труды ФИАН, 90, 124 (1976).