Краткие сообщения по физике № 3 1978

КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ С ФОРМФАКТОРОМ В ЛАГРАНЖИАНЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В. Б. Вологодский

УДК 530.145

Построена S-матрица в нелокальной теории поля с формфактором в лагранжиане взаимодействия путем перехода к теории с высшими производными и квантования этой теории.

Вопрос квантования нелокальной теории рассматривался, в частности, в работах /1-3/. В этих работах обобщение на нелокальное взаимодействие проводилось путем введения формфактора в свободный лагранжиан, что, в случае положительности фурье-образа $V(p^2)$ этого формфактора при положительных $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2$, эквивалентно введению формфактора $(V(p_1^2)V(p_2^2)\ldots V(p_n^2))^{1/2}$ в лагранжиан взаимодействия $g\varphi^n$. В данном сообщении мы рассмотрим более общий случай, когда формфактор, вводимый в лагранжиан взаимодействия, может не иметь такого факторизованного вида. Рассмотрим следующий лагранжиан:

$$L_I = g\int F(x-y,\ x-z,\ y-z)\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)dydz =$$

$$= g\int F(-y,\ -z,\ y-z)\varphi(x)\varphi(x+y)\varphi(x+z). \qquad (1)$$

Представляя $\varphi(x+y)$ и $\varphi(x+z)$, соответственно, в виде $\exp(y_\nu \times \times d/dx_\nu)\varphi(x)$ и $\exp(z_\nu\, d/dx_\nu)\varphi(x)$ и учитывая релятивистскую инвариантность теории, можно представить L_I в форме лагранжиана с высшими производными:

$$L_I = g\left[\Phi(\Box_x, \Box_{x'}, \Box_{x''})\varphi(x)\varphi(x')\varphi(x'')\right]\Big|_{x''=x'=x}, \qquad (2)$$

где Φ выражается через фурье-образ формфактора F. Будем предполагать, что $\Phi(p_1^2,p_2^2,p_3^2)$ – целая функция своих аргументов, достаточно быстро убывающая при $p_1^2 \to -\infty$, действительная при действительных значениях аргументов и обращающаяся в единицу на массовой оболочке. При проведении канонического квантования будем рассматривать лагранжиан (2) как предел выражения

$$L_I^N = g \sum_{n,m,k=0}^{N} c_{nmk}(\Box^n\varphi(x))(\Box^m\varphi(x))(\Box^k\varphi(x)) \qquad (3)$$

при $N \to \infty$. Здесь c_{nmk} - коэффициенты разложения форм-фактора Φ. Поскольку до перехода к пределу $N \to \infty$ выражение (3) приводит к расходимостям в матричных элементах, введем временно также формфактор в свободный лагранжиан. Выбирая этот формфактор в виде

$$\prod_{j=1}^{2N_1+1}\left(1 - \frac{\delta}{j^\sigma}\,\frac{\Box}{m^2 - i\varepsilon}\right) \equiv \sum_{n=0}^{2N_1+1} B_n(\delta)(\Box - m^2)^n,$$

$$\text{где } N_1 \geqslant N, \quad \sigma > 1,$$

получим для полного лагранжиана:

$$L = \frac{1}{2}\varphi_0(\Box - m^2)\prod_{j=1}^{2N_1+1}\left(1 - \frac{\delta}{j^\sigma}\,\frac{\Box}{m^2 - i\varepsilon}\right)\varphi_0 +$$

$$+ g \sum_{n,m,k=0}^{N} c_{nmk}(\Box^n\varphi_0)(\Box^m\varphi_0)(\Box^k\varphi_0). \qquad (4)$$

Следуя методике, изложенной в работе /2/, перейдем от лагранжиана (4) к следующему:

$$\tilde{L} = \sum_{n=0}\left[\varphi_n\varphi_{n+1}B_{2n} + \varphi_{n+1}^2 B_{2n+1} + \lambda_n\varphi_{n+1} + \partial_\mu\lambda_n\partial_\mu\varphi_n\right] +$$

$$+ g \sum_{n,m,k=0}^{N} c_{nmk}\varphi_n\varphi_m\varphi_k. \qquad (5)$$

Последнее выражение содержит вместо высших производных большее число полей (φ_n, λ_n). Как легко убедиться, оба лагранжиана приводят к одинаковым уравнениям для φ_0, что доказывает их эквивалентность.

Поскольку лагранжиан (5) не зависит от обобщенной скорости $\dot{\varphi}_{N+1}$, он описывает систему со связью. Варьируя лагранжиан по φ_{N_1+1}, находим уравнение связи:

$$B_{2N_1}\varphi_{N_1} + 2B_{2N_1+1}\varphi_{N_1+1} + \lambda_{N_1} = 0. \qquad (6)$$

Канонические импульсы $\pi_\varphi^{(n)}$, $\pi_\lambda^{(n)}$ к переменным φ_n, λ_n и гамильтониан H имеют вид:

$$\pi_\varphi^{(n)} = \dot{\lambda}_n, \quad \pi_\lambda^{(n)} = \dot{\varphi}_n, \qquad H = \sum_{n=0}^{N_1} (\pi_\varphi^{(n)}\dot{\varphi}_n + \pi_\lambda^{(n)}\dot{\lambda}_n) - \tilde{L},$$

где в $\tilde{L}$ обобщенные скорости $\dot{\varphi}_n$, $\dot{\lambda}_n$ подразумеваются выраженными через соответствующие канонические импульсы, а φ_{N_1+1} – через φ_{N_1} и λ_{N_1}, согласно (6). Производящий функционал функций Грина выражается через H обычным образом:

$$Z = \int d\mu \exp i \int d^4x \times$$

$$\times \left[\sum_{n=0}^{N_1} \left(\varphi_n(x)\pi_\varphi^{(n)}(x) + \dot{\lambda}_n(x)\pi_\lambda^{(n)}(x) - H + \varphi_0(x)J(x)\right)\right],$$

где

$$d\mu = \prod_x \prod_{n=0}^{N_1} d\varphi_n(x)d\lambda_n(x)d\pi_\varphi^{(n)}(x)d\pi_\lambda^{(n)}(x).$$

После небольших преобразований получаем для Z следующее выражение:

$$Z = \int d\mu \exp i \int d^4x \left\{-\sum_{n=0}^{N_1} (\pi_\varphi^{(n)} - \dot{\lambda}_n)(\pi_\lambda^{(n)} - \dot{\varphi}_n) + \tilde{L} + J\varphi_0\right\}.$$

Функциональное интегрирование по всем каноническим импульсам и полям, исключая φ_0, выполняется тривиально и приводит к обычному выражению:

$$Z = \int d\varphi_0 \exp i \int d^4x(L(x) + J(x)\varphi_0(x)),$$

где L дается формулой (4).

Чтобы совершить переход к пределам $N, N_1 \to \infty, \delta \to 0$ в выражениях для матричных элементов, совместим все факторы пропагаторов, соответствующие "физическим" частицам (имеющим массу m) в один множитель, используя для этого параметризацию Фейнмана:

$$\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} = (n-1)! \int_0^1 d\xi_1 \ldots \int_0^1 d\xi_n \frac{\delta(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}{(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \ldots + \alpha_n\xi_n)^n}.$$

Возникшие в результате множители в знаменателях подинтегральных выражений линейной заменой переменных интегрирования можно привести к виду

$$f_1(\xi, p_i p_j) + f_2(\xi, k_i k_j), \qquad (7)$$

где p_i и k_i - соответственно виртуальные и внешние импульсы. После этого повернем контуры интегрирования по нулевым компонентам виртуальных импульсов на мнимую ось, перейдя, таким образом, по виртуальным импульсам в эвклидово пространство. При этом повороте контур интегрирования не пересечет особенностей, положение которых определяется нулями выражения (7). Особенности же пропагаторов, соответствующие нефизическим частицам, имеющим массу $m_j = m\sqrt{j^{\sigma}/\delta}$ (см. (4)), вообще говоря, необходимо учесть при повороте контура (в случае времениподобных значений внешних импульсов). Но, как легко видеть, при фиксированных значениях внешних импульсов и достаточно малых значениях δ эти особенности также не мешают повороту контуров интегрирования. Поскольку в дальнейшем нас будет интересовать предел $\delta \to 0$, то δ можно считать сколь угодно малым и, соответственно, не учитывать особенности пропагаторов, соответствующие "нефизическим" частицам. После перехода в эвклидово пространство виртуальных импульсов предельные переходы $N, N_1 \to \infty$, а затем и $\delta \to 0$ можно совершить под интегралами. Поскольку возникающие при суммировании по n формфакторы достаточно быстро убывают при эвклидовых виртуальных импульсах, то матричные элементы после выполнения всех предельных переходов останутся конечными. Таким образом, после интегрирования по параметрам ξ_i мы приходим для матричных элементов к выражениям, получающимся из исходного лагранжиана (I) при пространственноподобных внешних импульсах с помощью обычной диаграммной техники, сформулированной в эвклидовом пространстве. При времениподобных значениях внешних импульсов полученные выражения равны своим аналитическим продолжениям из области пространственноподобных значений. Заметим, что до перехода к пределам $N, N_1 \to \infty, \delta \to 0$, S-матрица была унитарна в расширенном пространстве, в котором действуют операторы φ_n, λ_n. Однако можно показать, что после перехода к пределам S-матрица становится унитарной в физическом пространстве.

Поступила в редакцию
I9 декабря I977 г.

Л и т е р а т у р а

1. A. Pais, G. E. Uhlenbeck, Phys. Rev., 79, 145 (1950).
2. Е. С. Фрадкин, в сб, "Проблемы теоретической физики", Памяти И. Е. Тамма, М., "Наука", I972 г., стр. I46.
3. Г. Е. Ефимов, "Нелокальные взаимодействия квантованных полей", М., "Наука", I977 г.