Краткие сообщения по физике № 5 1978

О НЕОДНОЗНАЧНОСТЯХ КВАНТОВАНИЯ ЗАДАННЫХ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

В. В. Додонов, В. И. Манько, В. Д. Скаржинский

УДК 530.145

Обсуждается неоднозначность процедуры квантования заданной классической системы, связанная с существованием различных лагранжианов или гамильтонианов, приводящих к одним и тем же классическим уравнениям движения. Предложен новый способ квантования, основанный на использовании интегралов движения.

Цель данной заметки - обратить внимание на тот факт, что существование различных лагранжианов или гамильтонианов, приводящих к одним и тем же классическим уравнениям движения (см. работы /1-7/) приводит к тому, что существует множество физически различных квантовых систем, для которых в классическом пределе получаются одни и те же уравнения движения Иными словами, знание только классических уравнений движения не позволяет однозначно проквантовать классическую систему.

Под квантованием заданной классической системы мы понимаем процедуру (см. /8/), которая заменяет классическую траекторию, с достоверностью описывающую переход системы из точки с обобщенными координатами $\vec{x}_1$ в момент времени t_1 в точку $\vec{x}_2$ в момент времени t_2, на некоторую комплексную функцию $G(\vec{x}_2,t_2; \vec{x}_1,t_1)$, называемую амплитудой вероятности перехода из точки $(\vec{x}_1,t_1)$ в точку $(\vec{x}_2,t_2)$. Заметим, что следствием данного определения является возможность описывать квантовую систему с помощью уравнения Шредингера. В самом деле, считая функцию G ядром некоторого оператора эволюции $\hat{U}(t_2; t_1)$ и налагая естественное требование существования обратного оператора $\hat{U}^{-1}$, мы получаем для $\hat{U}(t_2; t_1)$ уравнение Шредингера $i\hbar\partial\hat{U}(t_2; t_1)/\partial t_2 = \hat{H}\hat{U}$, где оператор $\hat{H}$ равен $i\hbar\dot{\hat{U}}\hat{U}^{-1}$.

Далее для простоты рассмотрим систему лишь с одной степенью свободы, хотя все основные выводы справедливы и в случае систем с произвольным, в том числе и бесконечным (теория поля) числом степеней свободы. Рассмотрим конкретный пример: классическую систему, описываемую уравнением $\ddot{x} + \gamma \dot{x} = 0$, и построим для нее амплитуду вероятности G (далее будем называть ее функцией Грина). Чтобы найти эту функцию, нужно знать либо лагранжиан, дающий данное уравнение движения, чтобы можно было вычислить фейнмановский интеграл, либо гамильтониан, чтобы решить уравнение Шредингера. Оказывается, что существует бесконечное множество совершенно разных гамильтонианов (и лагранжианов), приводящих к данному уравнению движения. Достаточно привести два из них /I-5/:

$$H_1 = (1/2)p^2\exp(-\gamma t); \qquad H_2 = \exp(p) + \gamma x. \tag{I}$$

Обратим внимание, что различие между соответствующими лагранжианами гораздо существеннее, чем тривиальное добавление полной производной по времени.

Заменив обобщенные импульсы на оператор $-i\hbar\partial/\partial x$, легко вычислить функции Грина в обоих случаях:

$$G_1(x_2,t_2; x_1,t_1) = \left[\frac{2i\pi\hbar}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})\right]^{-1/2} \exp\left\{\frac{i\gamma}{2\hbar}\frac{(x_2 - x_1)^2}{1 - \exp(-\gamma t)}\right\},$$

$$G_2(x_2,t_2; x_1,t_1) = (1/2\pi\hbar)\int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left\{(ip/\hbar)(x_2 - x_1) - \right. \tag{2}$$

$$\left. - (i\gamma t/\hbar)x_1 - (i/\gamma\hbar)e^{p}(e^{\gamma t} - 1)\right\}; \quad t = t_2 - t_1.$$

Мы видим, что получаются совершенно разные амплитуды вероятности перехода. Это означает, что мы получили разные квантовые системы, ибо функция Грина дает полную информацию о всех свойствах квантовой системы /8/.

Чтобы понять, в чем причина различия этих систем, заметим, что гамильтонианы H_I и H_2 связаны каноническим преобразованием

$$p_2 = p_1 - \gamma t; \quad x_2 = x_1 + (1/\gamma)(1 - e^{-\gamma t})(e^{p_1} - p_1);$$

$$H_2 = H_1 + \partial\Phi/\partial t, \tag{3}$$

задаваемым производящей функцией

$$\Phi(p_1,x_2) = \gamma t x_2 - p_1 x_2 + (1/\gamma)(1 - e^{-\gamma t})(e^{p_1} - p_1^2/2). \quad (4)$$

Вообще говоря, используя явно зависящие от времени канонические преобразования, можно любой гамильтониан преобразовать в любой другой гамильтониан. Это утверждение является следствием того факта, что любой гамильтониан можно превратить в нулевой, совершив каноническое преобразование к переменным x_0 и p_0, имеющим смысл интегралов движения – начальных точек в фазовом пространстве. Производящей функцией такого преобразования является классическое действие, удовлетворяющее уравнению Гамильтона-Якоби. Аналогичный результат имеет место и в квантовой механике.

Следовательно, хотя функции Грина G_1 и G_2 и могут быть получены одна из другой каноническим преобразованием, тем не менее входящие в них переменные имеют разный физический смысл, ибо каноническое преобразование (3), помимо того, что явно содержит время, ещё и перепутывает координаты с обощенными импульсами. (Обратим внимание, что это утверждение справедливо и при $\gamma = 0$). Поэтому, если стоять на той точке зрения, что под координатой в функции Грина понимается не просто какая-то обобщенная величина, а реальная пространственная координата, то нам приходится заключить, что гамильтонианы H_I и H_2 описывают действительно различные физические системы, хотя уравнения движения для них и оказываются одинаковыми.

В заключение отметим, что возможен и такой способ квантования заданной классической системы, при котором не нужно знать ни гамильтониана, ни лагранжиана, а достаточно знать лишь интегралы движения. Способ основан на выведенных в работах /9/ уравнениях для функции Грина любой динамической системы:

$$\hat{X}G(x_2;\, x_1) = x_1 G(x_2;\, x_1); \quad \hat{P}G(x_2;\, x_1) = i\hbar\, \partial G/\partial x_1, \quad (5)$$

где $\hat{X}$ и $\hat{P}$ – квантовые интегралы движения, имеющие смысл операторов начальных координат в фазовом пространстве. Допустим, что известны классические интегралы движения $x_0(x,\dot{x},t)$ и $\dot{x}_0(x,\dot{x},t)$. Тогда, заменив скорости $\dot{x}$ на обобщенные импульсы p, получим новые функции $x_0(x,p,t)$ и $p_0(x,p,t)$. Обычным способом превратив эти функции в операторы $\hat{x}$ и $\hat{p}$, мы сможем найти функцию Грина, решив уравнения (5). Основная проблема в таком способе квантования, (полностью эквивалентная проблеме нахождения лагранжиана или гамильтониана по заданным уравнениям движения), заключается в том, чтобы найти такую связь между скоростями и обобщенными импульсами, при которой уравнения (5) совместны, то есть чтобы выполнялись соотношения $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$.

Выбирая различные зависимости $\dot{x}(x,p,t)$ (из класса допустимых), мы и будем получать разные квантовые системы. Например, в рассмотренном выше случае, вводя импульс по формуле $p = \dot{x}\exp(\gamma t)$, получим функцию G_1. Более подробное изложение обсуждавшихся вопросов дано в работе /I0/.

Авторы благодарны Д. А. Киржницу, Ю. Д. Усачеву и В. Я. Файнбергу за интерес к работе и полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
5 апреля I978 г.

Литература

1. P. Havas, Nuovo Cimento (Supplemento), 5, 363 (1957); Acta Physica Austriaca, 38, 145 (1973).
2. H. H. Denman, J. Math. Phys., 6, 1611 (1965).
3. P. G. Sona, Energia Nucleare, 13, 318 (1966).
4. D. J. Currie and E. J. Saletan, Nuovo Cimento, 7, 967 (1966).
5. В. Д. Скаржинский, Препринты ФИАН № 93, № I77, I969 г.
6. Y. Gelman, E. J. Saletan, Nuovo Cimento, 18 B, 53 (1973).
7. G. Caratù, G. Marmo, A. Simoni, B. Vitale, F. Zaccaria, Nuovo Cimento, 31 B, 152 (1976).
8. Р. П. Фейнман, Rev. Mod. Phys., 20, 367 (1948).
9. В. В. Додонов, И. А. Малкин, В. И. Манько, ТМФ, 24, I64 (I975); Int. J. Theor. Phys., 14, 37 (1975).
I0. В. В. Додонов, В. И. Манько, В. Д. Скаржинский, Препринт ФИАН, I978 г. (в печати).