Краткие сообщения по физике № 6 1978

АВТОСТАБИЛИЗАЦИЯ ФАЗЫ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ

Л. И. Гудзенко, В. Е. Чертопруд

УДК 538.56

Показана возможность автостабилизации фазы колебаний в автономном генераторе с гладкими динамическими характеристиками. Рассмотрен конкретный пример томсоновских автоколебаний.

Анализ флуктуаций автоколебательных систем общего типа с одной степенью свободы приводит, как известно, к диффузионному закону размытия фазы колебаний $\vartheta(t)$, заключающемуся в асимптотической пропорциональности дисперсии набега фазы и времени наблюдения θ: $q(\theta) \equiv \langle[\vartheta(t+\theta) - \vartheta(t) - \theta]^2\rangle \simeq D\theta$ при $\theta \to \infty$. Обнаруженный несколько лет назад эффект автостабилизации фазы релаксационного автогенератора /I,2/, при котором дисперсия фазы ограничена, свидетельствует о наличии исключений из этого закона. Для рассмотренных в /I,2/ генераторов характерны особенности их динамического описания, в частности, разрывность установившихся колебаний. Покажем, что свойством автостабилизации фазы могут обладать и некоторые динамически автономные колебательные системы с гладкими характеристиками, к которым относятся даже автогенераторы томсоновского типа.

Чтобы не отвлекаться на обсуждение таких (в сущности, не принципиальных для обсуждаемой задачи) вопросов, как определение понятия фазы колебаний в случае их сложной формы, ограничимся системами, установившиеся регулярные сигналы которых синусоидальны. Впрочем, ход рассуждений показывает, что найденный результат должен сохраняться и для существенно более широкого круга систем, получаемых из рассматриваемой довольно общим топологическим преобразованием. Выбор синусоидальных автоколебаний определяется простотой изложения и не ограничивает круг систем, обладающих свойством автостабилизации фазы.

Ясно, что отправляясь от обладающего свойством автостабилизации фазы идеального релаксационного автогенератора /3/, можно путем фильтрации получить генератор квазимонохроматических колебаний с этим же свойством. Но такой генератор – не менее, чем с двумя степенями свободы – будет иметь негладкие динамические характеристики. Поступим иначе. Рассмотрим возмущаемую шумом динамически автономную систему третьего порядка вида

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = (1 + z)f(x,y) + F, \quad \frac{dz}{dt} = \varphi\left(x\,\frac{x + \frac{dy}{dt}}{x^2 + y^2}\right). \qquad (I)$$

Гладкую функцию $f(x,y)$ выберем так, чтобы "порождающая (I)" динамическая система $dx/dt = y$, $dy/dt = f(x,y)$ имела окружность единичного радиуса

$$x = x_0(t) \equiv \sin t, \quad y = y_0(t) \equiv \cos t \qquad (2)$$

в качестве своего устойчивого предельного цикла. Функция $\varphi(u)$ по условию дважды непрерывно дифференцируема, причем $d\varphi(u)/du > 0$ при $-\infty < u < \infty$, $\varphi(0) = 0$. Слагаемое $F(t)$ – стационарный флуктуационный короткокоррелированный процесс: $\langle F(t)\rangle \equiv 0$; $\langle [F(t)]^2\rangle \equiv$ $\equiv \sigma^2 F$; $\langle F(t + \tau)F(t)\rangle / \sigma^2 F \approx 0$ при $\tau > \tau_0$, $\tau_0 \ll 2\pi$. От декартовых координат x, y, z перейдем к цилиндрическим

$$\vartheta = \operatorname{Arctg}\frac{x}{y}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad Z = z. \qquad (3)$$

Как нетрудно видеть, последние совпадают с локальными координатами, определяемыми по циклу

$$x = x_0(t) \equiv \sin t, \; y = y_0(t) \equiv \cos t, \quad z = z_0(t) \equiv 0 \qquad (4)$$

динамической ($F = 0$) системы (I); по определению они являются непрерывными функциями времени t. Радиус-вектор $\rho(t)$ и полярный угол $\vartheta(t)$ изображающей точки (I) на фазовой плоскости (x, $y \equiv dx/dt$), как всегда при исследовании квазимонохроматических колебаний, играют роль амплитуды и фазы колебаний.

Перейдем к флуктуационным отклонениям сигнала от установившихся динамических колебаний (4): $\chi(t) \equiv \vartheta(t) - t$, $n_1(t) \equiv \rho(t) -$

-1, $n_2(t) \equiv z(t)$. Согласно (3), (I)

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} - 1 = - x\,\frac{x + d^2x/dt^2}{x^2 + (dx/dt)^2} = \psi\left(\frac{dz}{dt}\right), \qquad (5)$$

где $\psi \equiv -\varphi^{-1}$, φ^{-1} – функция, обратная φ. Обозначив $P \equiv \sin\vartheta + \frac{1}{\rho}\left[(1+z)f(\rho\sin\vartheta, \rho\cos\vartheta) + F\right]$, перепишем уравнения (I) в виде

$$\frac{d\gamma}{dt} = -P\sin\vartheta, \quad \frac{d\rho}{dt} = P\cos\vartheta, \quad \frac{dz}{dt} = \varphi\left(-\frac{d\gamma}{dt}\right). \qquad (6)$$

При достаточной малости возмущающей силы и флуктуационных отклонений γ, n_1, n_2 линеаризация по ним этой системы дает

$$\frac{d\gamma}{d\vartheta} = -\mathcal{P}\sin\vartheta, \quad \frac{dn_1}{d\vartheta} = \mathcal{P}\cos\vartheta, \quad \frac{dn_2}{d\vartheta} = V\mathcal{P}\sin\vartheta, \qquad (7)$$

где $\mathcal{P} \equiv R(\vartheta)n_1(\vartheta) - \sin\vartheta\; n_2(\vartheta) + F(\vartheta)$, $R(\vartheta) \equiv \sin\vartheta\left[1 + \frac{\partial f}{\partial x}(\sin\vartheta, \cos\vartheta)\right] + \cos\vartheta\,\frac{\partial f}{\partial y}(\sin\vartheta, \cos\vartheta)$, $V \equiv \frac{d\varphi}{du}(u=0)$. Ограничимся случаем, когда порождающая система является томсоновской:

$$f(x,y) \equiv x + \delta(x,y), \quad |\delta(x,y)| \lesssim 1, \quad |\tilde{\delta}(\vartheta)| \ll 1.$$

Обозначение $\tilde{\delta}(\vartheta)$ здесь и ниже используется для скользящего среднего значения функции $\delta(x(\vartheta), y(\vartheta))$, взятого по циклу (2):

$$\tilde{\delta}(\vartheta) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} \delta(\sin\xi, \cos\xi)\,d\xi.$$

Как известно /4/, вопрос об устойчивости цикла томсоновского автогенератора решается исходя из усредненных по циклу его линеаризованных характеристик. В случае томсоновской порождающей системы и малости $|z|$ перейдем поэтому от линеаризованной системы (7) к описанию усредненными коэффициентами:

$$d\tilde{\gamma}/d\vartheta = \tilde{\sigma}\tilde{n}_1 + \frac{1}{\tau}\tilde{n}_2 + \tilde{F}_x. \qquad (8')$$

$$d\tilde{n}_1/d\vartheta = -\tilde{N}\tilde{n}_1 + \tilde{F}_1, \qquad (8'')$$

$$d\tilde{n}_2/d\vartheta = V(\tilde{\Omega}\tilde{n}_1 - \frac{1}{2}\tilde{n}_2 - \tilde{F}_\gamma). \qquad (8''')$$

Здесь $\Omega(\vartheta) \equiv R(\vartheta)\sin\vartheta$, $N(\vartheta) \equiv R(\vartheta)\cos\vartheta$, $F_\gamma(\vartheta) \equiv -F(\vartheta)\sin\vartheta$, $F_1(\vartheta) \equiv F(\vartheta)\cos\vartheta$. Предположенная с самого начала устойчивость цикла (2) порождающей системы определяется знаком средней жесткости $\tilde{N}$. При $\tilde{N}>0$ цикл асимптотически устойчив. Итак, пусть $\tilde{N}>0$. Тогда согласно $(8'')$ при $\sigma^2 F<\infty$ дисперсия сглаженных флуктуаций $\tilde{n}_1$ (а значит, согласно общей теории, и самих флуктуаций n_1) ограничена. Отсюда (в силу $V>0$) ограниченной, исходя из уравнения $(8''')$, оказывается и дисперсия $\langle(\tilde{n}_2)^2\rangle$. Уравнения $(8')$, $(8''')$, свидетельствуя о строгой пропорциональности производных $d\tilde{\gamma}/d\vartheta$ и $d\tilde{n}_2/d\vartheta$, позволяют заключить, что из $\langle\tilde{n}_2^2\rangle<\infty$ следует ограниченность $\langle\tilde{\gamma}^2\rangle$, $\langle\gamma^2\rangle$.

Проведенное рассмотрение говорит непосредственно о том, что в случае томсоновости порождающей системы и достаточной малости возмущающей шумовой силы $F(\vartheta)$ дисперсия набега фазы $\gamma(t) \equiv \equiv \vartheta(t) - t$ остается ограниченной. В рассмотренном же ранее релаксационном варианте автогенератора, обладающего свойством автостабилизации фазы, дисперсия установившихся флуктуаций набега фазы могла, в принципе, существенно превышать T^2 (T – период автоколебаний). Этим автостабилизирующая система качественно отличается от синхронизуемых внешней силой. Покажем, что и в обсуждаемом здесь варианте возможно установление дисперсии фазового набега, превышающей $4\pi^2$. Для этого конкретизируем уравнения. Пусть

$$\varphi(u) \equiv Vu,\ f(x, y) \equiv -x + by(1 - x^2 - y^2),\ V>0,\ b>0.$$

Тогда согласно (6)

$$\frac{d\gamma}{dt} = -V\sin^2\vartheta\,\gamma - b\sin\vartheta\cos\vartheta(1 - V\gamma)(1 - \rho^2) - F\sin\vartheta,$$

$$\frac{d\rho}{dt} = V\sin\vartheta\cos\vartheta\,\gamma + b\cos^2\vartheta(1 - V\gamma)(1 - \rho^2) + F\cos\vartheta.$$

При малых дисперсиях процессов $F(t)$, $V\gamma(t)$ можно провести линеаризацию по $n \equiv \rho - 1$ и $V\gamma$, а затем усреднение по ϑ коэффициентов линеаризованной системы:

$$d\tilde{\gamma}/dt = -\frac{V}{2}\tilde{\gamma} + \tilde{F}_{\gamma}, \qquad (9')$$

$$d\tilde{n}/dt = -b\tilde{n} + \tilde{F}_{n}. \qquad (9'')$$

Решая уравнение (9′), получаем для сглаженного набега фазы установившегося сигнала

$$\tilde{\gamma}(t) = \exp\left(-\frac{V}{2}t\right)\int_{-\infty}^{t}\tilde{F}_{\gamma}(\xi)\exp\left(\frac{V}{2}\xi\right)d\xi.$$

Отсюда для дисперсии набега фазы следует

$$q(\Theta) \equiv \langle[\gamma(t+\Theta)-\gamma(t)]^2\rangle = 2\left[1-\exp\left(-\frac{V\Theta}{2}\right)\right]\times$$

$$\times\exp(-Vt)\int_{-\infty}^{t}d\xi\int_{-\infty}^{t}\langle\tilde{F}_{\gamma}(\xi)\,\tilde{F}_{\gamma}(\eta)\rangle\exp\left[\frac{V}{2}(\xi+\eta)\right]\times$$

$$\times d\eta \doteq \frac{2C}{V}\left[1-\exp\left(-\frac{V\Theta}{2}\right)\right], \quad \text{при} \quad \Theta \gg 2\pi, \quad V \ll 2\pi,$$

где $C \approx \int_{-2\pi}^{2\pi}\langle\tilde{F}_{\gamma}(t)\tilde{F}_{\gamma}(t+\xi)\rangle d\xi$, в соответствии с короткокоррелированностью шумовой силы $F(t)$. Ясно, что при данном C можно взять столь малую величину V, что установившаяся дисперсия набега фазы $q(\infty) = 2C/V$ окажется больше $4\pi^2$.

Поступила в редакцию
17 апреля 1978 г.

Литература

1. Л. И. Гудзенко, Радиофизика, 12, № 12, 1815 (1969).
2. Л. И. Гудзенко, В. Е. Чертопруд, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 9, 27 (1970).
3. Л. И. Гудзенко, В. Е. Чертопруд, Труды ФИАН, 90, 198 (1976).
4. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, М., 1959 г.