Краткие сообщения по физике № 6 1978

ОБОБЩЕННЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ПРОИЗВОДЯЩИЕ ИНВАРИАНТЫ ГРУПП SU_n

В. П. Карасев, Л. А. Шелепин

УДК 530.1:535.33

Получены обобщенные неприводимые когерентные состояния групп SU_n в форме производящих инвариантов SU_n. Это позволяет применить развитую ранее технику производящих инвариантов к анализу когерентных кооперативных явлений.

Обобщенные когерентные состояния (КС) $|\Psi_g\rangle$, сохраняющие целый ряд свойств обычных (глауберовских) КС /1 - 3/

$$|z\rangle = \exp(-1/2|z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(za^+)^n}{n!} |0\rangle \tag{1}$$

(z - комплексная переменная, a^+ - бозонный оператор рождения, $|0\rangle$ - вакуумный вектор), определяются для произвольной группы Ли G соотношением /3,4/

$$|\Psi_g\rangle = D(g)|\Psi_0\rangle, \quad g \in G, \tag{2}$$

где $|\Psi_0\rangle$ - фиксированный вектор пространства некоторого представления $D = \{D(g)\}$ группы G. Они имеют принципиальное значение для описания когерентных кооперативных явлений. Так, сверхизлучающие состояния в двухуровневой модели Дике по существу являются обобщенными КС группы SU_2 (атомные КС); расчет параметров сигнала сверхизлучения сводится к вычислению квантовых средних в атомных КС /5/. Использование обобщенных КС групп SU_n весьма перспективно для анализа когерентных свойств реальных многоуровневых систем. Важный шаг в этом направлении сделан в работе /6/, где были построены обобщенные КС, соответствующие неприводимым представлениям (НП) $D(P)$ $(P \equiv (P_1, \ldots, P_{n-1})$ групп SU_n – неприводимые КС (НКС) $|P;[z_i]>$ $(z_i \equiv (z_{ik}))$. Их построение проводилось путем проектирования на инвариантные подпространства L_P НП $D(P)$ из пространства произведений $\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{n} |z_{ik}>$:

$$|P;[z_i]> = E_P \prod_{i,k} |z_{ik}>, \qquad (3)$$

где E_P – проекционный оператор на L_P.

В данной работе получено представление НКС SU_n в виде выражений, формально совпадающих (с точностью до нормировки) с производящими инвариантами (ПИ) групп SU_n. Такое представление НКС позволяет использовать технику ПИ SU_n /7,8/ для разработки эффективного аппарата КС SU_n. Это в принципе открывает возможности широкого применения современного группового аппарата к анализу когерентных эффектов в многоуровневых системах.

Реализуем пространство L_P однородными полиномами $R([x_i])$ от компонент $(n-1)$ векторных аргументов $x_i \equiv (x_{ik})$ со старшим вектором $|P;max>([x_i]) = N(P) \prod_{i=1}^{n-1} [x_1 \ldots x_i \; e_{i+1} \ldots e_n]^{P_i} =$
$= N(P) \prod_{i=1}^{n-1} \left(\Sigma \varepsilon_{j_1 \ldots j_n} x_{1j_1} \ldots x_{ij_i} \right)^{P_i}$ и скалярным произведением /7-9/

$$(R([x_i]), \; R'([x_i])) = R^*([\bar{x}_i])R'([x_i]), \qquad (4)$$

где $\bar{x}_{ik} \equiv \partial/\partial x_{ik}$, $N(P)$ – обеспечивающий нормированность векторов $|P;\vartheta>$ канонического базиса $L_P(X)$, $X \equiv [x_i]$ множитель (см. /9/); знаком $*$ отмечено комплексное сопряжение коэффициентов $R(\ldots)$. Это представление $L_P \equiv L_P(X)$ изоморфно швингеровской реализации L_P с помощью бозонных операторов /10/. Осуществим теперь в $L_P(X)$ построение НКС $|P;[z_i]>$ по схеме (2). Для этото возьмем в качестве $|\Psi_o>$ вектор, чьи координаты в базисе $\{|P;\vartheta>(X)\}$ зависят от $(n - 1)$ комплексных векторов $c_i \equiv (c_{ik})$ и по форме совпадают (с точностью до множителя) с компонентами контраградиентного базиса $\{|\bar{P};\bar{\vartheta}>\}$:

$$|\Psi_o> \equiv \rho \sum_{\vartheta\vartheta'} \begin{pmatrix} P \\ \vartheta\vartheta' \end{pmatrix} |P;\vartheta>(X)|\bar{P};\vartheta'>(C) =$$

$$= \rho N^2(P) \prod_{i=1}^{n-1} [x_1 \dots x_i\, c_1 \dots c_{n-i}]^{p_i}, \qquad (5)$$

где $\bar{P} = [p_{n-1},\dots,p_1]$, $\begin{pmatrix} P \\ \vartheta\vartheta' \end{pmatrix}$ – метрический тензор, ρ – нормировочный множитель; $[x_1 \dots x_m\, c_1 \dots c_{n-m}] = \sum \varepsilon_{i_1,\dots,i_n} x_{1\,i_1} \dots$ $\dots x_{m\,i_m} c_{1\,i_{m+1}} \dots c_{n-m\,i_n}$ – компонентные определители /7/. Отметим, что формально правая часть равенства (5) совпадает с ПИ для редукции прямого произведения НП SU_n вида $D(P) \times D(\bar{P}) \longrightarrow D([0,0,\dots,0])$.

Учитывая, что преобразования из группы SU_n

$$x_i \longrightarrow a x_i : x_{im} \longrightarrow \sum_k a_{mk} x_{ik}, \quad a = \|a_{ik}\| \in SU_n \qquad (6)$$

векторов x_i индуцируют преобразования определителей

$$[x_1 \dots x_m c_1 \dots c_{n-m}] \xrightarrow{a} [a x_1 \dots a x_m\, c_1 \dots c_{n-m}] =$$

$$= [x_1 \dots x_m\, z_1 \dots z_{n-m}],$$

$$z_m \equiv (z_{mi}), \; z_{mi} = \sum_j a^{-1}_{ij} c_{mj} = \sum_j a^*_{ji} c_{mj}, \quad a \in SU_n, \qquad (7)$$

получим следующее выражение для НКС $|P;[z_i]> \equiv |P;[z_i]>(X)$ группы SU_n, реализованных по схеме (2) в $L_P(X)$:

$$|P;[z_i]>(X) = \rho([z_i])N^2(P) \prod_{m=1}^{n-1} [x_1 \dots x_m\, z_1 \dots z_{n-m}]^{p_i} \qquad (8)$$

Значение ρ определим, нормируя найденные состояния на единицу в скалярном произведении (4):

$$\rho^{-2} = N^{4}(P) \prod_{i=1}^{n-1} \left[\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_i \; z_1^* \ldots z_{n-i}^*\right]^{P_i} \times$$

$$\times \left[x_1 \ldots x_i \; z_1 \ldots z_{n-i}\right]^{P_i} = N^{2}(P)(z_1 z_1^*)^{P_{n-1}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} (z_1 z_1^*)(z_2 z_1^*) \\ (z_1 z_2^*)(z_2 z_2^*) \end{vmatrix}^{P_{n-2}} \ldots \begin{vmatrix} (z_1 z_1^*) & \ldots & (z_{n-1} z_1^*) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (z_1 z_{n-1}^*) & \ldots & (z_{n-1} z_{n-1}^*) \end{vmatrix}^{P_1},$$

$$(z_i z_k^*) = \sum_m z_{im} z_{km}^* = \sum_m c_{im} c_{km}^*. \tag{9}$$

Из соотношения (8) видно, что КС $|P; [z_i]>$ (X) с точностью до множителя совпадают по форме с ПИ того же типа, что и (5). Это представляет ряд возможностей при оперировании с НКС SU_n на основе результатов работ /7-9/ для ПИ SU_n. Так, например, используя ортонормированность и полноту канонического базиса $\{|P; \nu>\}$, эквивалентность трансформационных свойств $<P; \nu|$ и $|\bar{P}; \bar{\nu}>$, получаем следующее дифференциально-инвариантное выражение для единичного оператора I_P в $L_P(X)$:

$$I_P \equiv \sum_{\nu} |P; \nu><P; \nu| = N^{4}(P) \prod_{i=1}^{n-1} \left[x_1 \ldots x_i \; \bar{\sigma}_1 \ldots \bar{\sigma}_{n-i}\right]^{P_i} \times$$

$$\times \left[\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_i \; \sigma_1 \ldots \sigma_{n-i}\right]^{P_i}. \tag{10}$$

Отсюда и из формул (8), (9) следует представление I_P с помощью НКС SU_n:

$$I_P = \rho^{-1}([\alpha_i])|P; [\bar{\alpha}_k]> (X)\rho^{-1}([\alpha_i])|P; [\alpha_i]>(\bar{X}), \; \bar{X} \equiv \{\bar{x}_i\}. \tag{11}$$

Используя соответствие между данной реализацией L_P, швингеровской схемой и представлением Баргманна /11/, можно перецисать (II) в интегральном виде

$$I_p = \varkappa^{-n(n-1)} \int \rho^{-2}([\alpha_i]) \exp\left(-\sum_{i,k} |\alpha_{ik}|^2\right) |p; [\alpha_i]\rangle \langle p; [\alpha_i]| \times$$

$$\times \prod_{i,k} d\mathrm{Re}\,\alpha_{ik}\, d\mathrm{Im}\,\alpha_{ik}, \tag{12}$$

представляющем стандартную запись соотношения полноты для НКС.

Аналогичные построения НКС SU_n (в виде ПИ) можно осуществлять и по схеме (3) в пространстве многомодовых глауберовских КС $\prod_{i,k} |z_{ik}\rangle$. Для этого (а также для разложения КС $\prod_{i,k} |z_{ik}\rangle$ по НКС SU_n) необходимо иметь инвариантно-дифференциальные представления типа (IO) для единичного оператора и всех проекционных операторов E_p в прямом произведении пространств $L[p_1\dot{0}] \times \ldots \times L[p_{n-1}\dot{0}]$, так как из (I) видно, что КС $\prod_{i,k} |z_{ik}\rangle$ принадлежат прямой сумме $\sum_{\{p_i\}} \oplus L_{[p_1\dot{0}]} \times L_{[p_2\dot{0}]} \times \ldots \times L_{[p_{n-1}\dot{0}]}$, $[p_i\dot{0}] \equiv [p_i, 0, \ldots, 0]$. Эта задача решается (по аналогии с (IO)) с помощью результатов работы /9/. Подробная запись получаемых таким способом НКС SU_n, а также обсуждение их свойств и связей с НКС (8) будут даны позднее. Отметим, что в принципе данный подход допускает распространение на другие группы G (в частности O_n, Sp_{2n}), для которых имеется (или может быть развита) техника ПИ, аналогичная случаю $G = SU_n$.

Поступила в редакцию
26 апреля 1978 г.

Литература

1. R. J. Glauber, Phys. Rev., 130, 2529 (1963); 131, 2776 (1963).
2. Сб. "Когерентные состояния в квантовой теории", под ред. В. И. Манько, "Мир", М., 1972 г.
3. А. М. Переломов, УФН, 123, 23 (1977).

4. A. M. Perelomov, Comm. Math. Phys., 26, 222 (1972).
5. F. T. Arechi et. al., Phys. Rev., A6, 2211 (1972).
6. В. В. Зверев, ТМФ, 29, 40I (1976).
7. В. П. Карасев, Л. А. Шелепин, Краткие сообщения по физике ФИАН, № I, 23 (1977); В. П. Карасев, Доклад на совещании "Групповые методы в физике", г. Киев, I8-2I октября 1977 г.
8. В. П. Карасев, П. П. Карасев, Л. А. Шелепин, ТМФ, 34, I85 (1978).
9. В. П. Карасев, П. П. Карасев, Л. А. Шелепин, Краткие сообщения по физике ФИАН, № I2, 27 (1977).
10. J. Schwinger, On Angular Momentum, U S Atomic Energy Commission, NYO-3071, 1952; G. E. Baird, L. C. Biedenharn, J. Math. Phys., 4, 1449 (1963).
11. V. Bargmann, Comm. Pure and Appl. Math., 14, 187 (1961); Rev. Mod. Phys., 34, 829 (1962).