Краткие сообщения по физике № 7 1978

СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ СЛАБОГО СВЕРХПРОВОДНИКА С ТОКОМ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г. Ф. Жарков, А. Д. Заикин

УДК 536.48

Получена формула для свободной энергии слабого сверхпроводника, несущего транспортный ток и помещенного во внешнее магнитное поле

Термодинамическое рассмотрение различных свойств джозефсоновских туннельных барьеров проводилось в ряде работ (см.,например,/I-6/). Так, в /I-3/ было получено выражение для поля H_{c1}, отвечающего началу проникновения вихрей в туннельный переход, в /3-6/ найдены кривые намагничения и термодинамические потенциалы слабых сверхпроводников конечных размеров. Однако до сих пор рассмотрение проводилось для случая отсутствия транспортного тока через барьер (другими словами, магнитное поле на обоих краях барьера считалось одинаковым), и, соответственно, выражение для потенциала Гиббса (свободной энергии) слабого сверхпроводника было написано только для этого случая /3,4/.

В настоящей работе получено выражение для свободной энергии слабого сверхпроводника конечных размеров в случае произвольных граничных условий на краях барьера.

Пусть туннельный переход, разделяющий два сверхпроводника, лежит в плоскости $z = 0$. Транспортный ток, текущий по сверхпроводникам, направлен по оси z и проходит перпендикулярно барьеру шириной L. Внешнее однородное магнитное поле H_e направлено по оси y, причем на краях барьера в точках $x = 0$ и $x = L$ значения магнитного поля равны, соответственно, $H_0 = H_e - H_I$ и $H_L = H_e + H_I$, где H_I - магнитное поле, связанное с транспортным током I (использованы безразмерные единицы, см. ниже). Ограничимся рассмотрением одномерной задачи, когда распределения поля и тока в барьере зависят лишь от одной координаты x в плоскости барьера.

Возьмем за основу общее уравнение, описывающее нестационарные процессы в джозефсоновском барьере /3,4/:

$$\partial^2\varphi/\partial t^2 + \beta\,\partial\varphi/\partial t - \partial^2\varphi/\partial x^2 + \sin\varphi = 0. \qquad (I)$$

Здесь $\varphi(x,t)$ – так называемая разность фаз параметра порядка сверхпроводников по разные стороны барьера, t – безразмерное время, которое измеряется в единицах $\tau = \lambda_J/c_0 \sim 10^{-11}$ с, λ_J – джозефсоновская глубина проникновения ($\lambda_J \sim 0{,}1$ мм), $c_0 = c(l/2\varepsilon\lambda_L)$ – скорость электромагнитных волн в переходе, ε – диэлектрическая проницаемость барьера, λ_L – лондоновская глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник, c – скорость света в вакууме, l – толщина диэлектрического слоя между сверхпроводниками. Безразмерная координата x в (I) измеряется в единицах λ_J, магнитное поле в барьере есть $H(x,t) = \partial\varphi(x,t)/\partial x$, электрическое поле $E(x,t) = \partial\varphi(x,t)/\partial t$. Член $\beta\partial\varphi/\partial t$ $(\beta > 0)$ феноменологически учитывает омические потери в барьере, связанные с наличием в нестационарном случае нормальной компоненты тока через барьер ($j_n = \sigma_n E$, σ_n – нормальная проводимость барьера).

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 = \sin\varphi(x), \qquad (2)$$

описывающее стационарное распределение поля и тока в барьере, причем $H(x) = d\varphi/dx$, $j(x) = \sin\varphi(x)$. Мы будем считать, что краевые значения поля H_0 и H_L не зависят от времени, хотя это требование не принципиально и все выкладки можно провести для случая зависящих от времени граничных условий.

Умножая уравнение (I) на $\partial\varphi/\partial t$ и интегрируя его по x от $x = 0$ до $x = L$ и по времени от некоторого момента t' до t, получим

$$-\beta\int_{t'}^{t}\int_{0}^{L}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 dx d\tau = \int_{t'}^{t}\int_{0}^{L}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right\} dx d\tau -$$

$$-\int_{t'}^{t}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_0^L d\tau = \int_0^L\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 1 - \cos\varphi\right\}\bigg|_{t'}^{t} dx -$$

$$-\int_{t'}^{t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\bigg|_L H_L - \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\bigg|_0 H_0\right) d\tau. \qquad (3)$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t') = (\varphi_L(t) - \varphi_L(t'))H_L - (\varphi_0(t) - \varphi_0(t'))H_0 -$$

$$-\beta\int_{t'}^{t}\int_0^L\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2 dx d\tau. \qquad (4)$$

Здесь

$$\mathcal{E}(t) = \int_0^L \left\{\frac{1}{2}(\partial\varphi/\partial\tau)^2 + \frac{1}{2}(\partial\varphi/\partial x)^2 + 1 - \cos\varphi\right\}\bigg|_t dx \qquad (5)$$

– энергия джозефсоновского барьера (первые два члена представляют собой энергию электрического и магнитного полей в барьере, третий член – энергия связи двух сверхпроводников), φ_L и φ_0 – значения разности фаз на краях барьера при $x = L$ и $x = 0$. Энергия $\mathcal{E}$ выражена в единицах $\hbar j_c/2e$ (j_c – критическая плотность джозефсоновского тока).

Продифференцировав (5) по t получим

$$d\mathcal{E}(t)/dt = E_L H_L - E_0 H_0 - \beta\int_0^L (d\varphi/dt)^2 dx. \qquad (6)$$

Здесь E_L и E_0 – значения электрического поля на краях барьера (зависящие от времени). Физический смысл соотношения (6) очевиден: первые два члена в правой части равенства равны значениям вектора Пойнтинга в точках барьера $x = 0$ и $x = L$, а третий член представляет собой омические потери в барьере в момент времени t.

Таким образом, соотношение (6) определяет закон изменения энергии слабого сверхпроводника.

Вернемся теперь к формуле (4). Вводя функцию

$$G(t) = \mathcal{E}(t) - (\varphi_L(t)H_L - \varphi_0(t)H_0), \qquad (7)$$

получим

$$G(t) - G(t') = -\beta \int_{t'}^{t} \int_{0}^{L} (\partial\varphi/\partial\tau)^2 d\tau. \qquad (8)$$

Нас будет интересовать случай, когда в барьере возможно статическое распределение поля и тока. (Для этого полный ток через барьер не должен превышать некоторое критическое значение I_c). При этом нестационарные процессы, связанные с включением поля и тока, затухнут с течением времени из-за наличия диссипации ($\beta > 0$) и в барьере установится стационарное распределение поля и тока, описываемое уравнением (2). Поскольку правая часть (8) отрицательна, то ясно, что при $t \to \infty$ функция $G(t)$ убывает, то есть принимает минимальное значение в стационарном состоянии. Следовательно, величина

$$G = \lim_{t \to \infty} G(t) \qquad (9)$$

является ничем иным, как свободной энергией слабого сверхпроводника с током в магнитном поле.

В справедливости этого утверждения можно убедиться еще и следующим образом. С математической точки зрения решение уравнения (2) должно быть экстремалью функционала свободной энергии G, то есть должно выполняться условие

$$\delta G = 0 \qquad (10)$$

на решениях уравнения (2). Легко видеть, что условие (I0) выполняется при заданных граничных условиях для функционала

$$G[\varphi] = \mathcal{E}[\varphi] - \int_0^L (d/dx)(\varphi d\varphi/dx)dx = \mathcal{E}[\varphi] - (\varphi_L H_L - \varphi_0 H_0), \quad (II)$$

$$\mathcal{E}[\varphi] = \int_0^L \left\{\frac{1}{2}(\partial\varphi/\partial x)^2 + 1 - \cos\varphi\right\}dx.$$

Это выражение получается также из (7) - (9). Выражение (II) можно переписать и в ином виде:

$$G[\varphi] = \mathcal{E}[\varphi] - H_e\bar{H}L - I\bar{\varphi}L, \quad (I2)$$

$$\bar{H} = \frac{1}{L}\int_0^L (d\varphi/dx)dx = [\varphi(L) - \varphi(0)]/L, \qquad \bar{\varphi} = [\varphi(L) + \varphi(0)]/2L.$$

При $H_L = H_0 = H_e$ (то есть при $I = 0$) формула (I2) переходит в известное выражение для свободной энергии слабого сверхпроводника в однородном поле H_e /3,4/:

$$G[\varphi] = \mathcal{E}[\varphi] - H_e\bar{H}L. \quad (I3)$$

Таким образом, функционал (I2) является обобщением выражения (I3) для свободной энергии слабого сверхпроводника в однородном поле /3,4/ на случай наличия транспортного тока через барьер.

Поступила в редакцию
29 мая I978 г.

Литература

1. B. D. Josephson, Adv. Phys., 19, 419 (1965).
2. И. О. Кулик, ЖЭТФ, 5I, I952 (I966).

3. И. О. Кулик, И. К. Янсон, Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах, "Наука", М., 1970 г.
4. Л. Солимар, Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение, "Мир", М., 1974 г.
5. Г. Ф. Жарков, ЖЭТФ, 71, 1951 (1976).
6. Г. Ф. Жарков, С. А. Васенко, ЖЭТФ, 74, 665 (1978).