Краткие сообщения по физике № 8 1978

ОБ ОСОБЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ГРУППЫ ПЕРЕНОРМИРОВОК

И. В. Тютин [ж)]

УДК 530.145

Доказано, что особые решения точных уравнений группы перенормировок для эффективных зарядов существуют, если такие решения существуют в однопетлевом приближении.

Недавно в ряде работ /1/ было предложено использовать при построении моделей калибровочных теорий специальные соотношения между константами связи, что позволяет построить асимптотически свободные теории даже в случаях, когда все частицы являются массивными. Эти специальные соотношения приводят к существованию особых решений уравнений группы перенормировок, обеспечивающих асимптотическую свободу. Так как β-функции известны в общем случае только в однопетлевом приближении, существование особых решений доказывается только в этом приближении. В этом сообщении доказывается, что если особые решения уравнений группы перенормировок для эффективных зарядов существуют в однопетлевом приближении, тогда особые решения существуют и у точных уравнений.

Для простоты мы ограничимся случаем всего двух зарядов: $x>0$ (аналог янг-миллсовского заряда) и z (аналог остальных зарядов). Уравнения группы перенормировок имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \beta_x(x,z), \\ \dot{z} &= \beta_z(x,z). \end{aligned} \tag{1}$$

ж) Томский государственный педагогический институт им. Ленинского комсомола.

Мы предположим, что ряд теории возмущений для β-функций правильно передает их поведение при малых зарядах. Тогда β-функции в (I) имеют следующую общую структуру:

$$
\begin{aligned}
\beta_x &= dx^2 + x^3\varphi_4(x,z), \\
\beta_z &= az^2 + bxz + cx^2 + \sum_{k=0}^{3} x^k z^{3-k}\varphi_k(x,z),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где функции φ_k несингулярны при x и z, стремящихся к нулю. Первый член в β_x и первые три члена в β_z играют роль однопетлевого приближения, в то время как остальные члены играют роль многопетлевых поправок.

Существование особого решения уравнения (I) эквивалентно существованию решения уравнения:

$$
\frac{d}{dx} z = \frac{\beta_z}{\beta_x} \tag{3}
$$

с граничным условием: $z(x) \to 0$ при $x \to 0$. Представим z в виде:

$$
z(x) = x(\bar{z} + u(x)), \tag{4}
$$

где константа $\bar{z}$ является особым решением "однопетлевого" приближения к уравнению (3):

$$
d\bar{z} = a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c, \tag{5}
$$

которое, по предположению, существует. Тогда для $u(x)$ получается уравнение:

$$
xu^1 = Qu + x\psi_1(x) + xu\psi_2(x,u) + a_1u^2, \tag{6}
$$

$$
Q = (2a/d)\bar{z} + b/d - 1, \qquad a_1 = a/d, \tag{7}
$$

где функции ψ_1 и ψ_2 несингулярны при x и u, стремящихся к нулю. Отметим, что Q определяется однопетлевым приближением. Теперь нужно доказать, что уравнение (6) имеет решение $u(x)$, стремящееся к нулю при $x \to 0$.

Перепишем (6) в виде интегрального уравнения:

$$u(x) = x^Q \int_0^x \frac{dy}{y} y^{-Q} \left[y\psi_1(y) + yu(y)\psi_2(y,u(y)) + a_1 u(y)^2 \right], \quad (8)$$

и будем решать его методом интераций:

$$u_0 = 0$$

$$u_1 = x^Q \int_0^x \frac{dy}{y} y^{-Q} \cdot y\psi_1(y)$$

$$\vdots \qquad (9)$$

$$u_k = x^Q \int_0^x \frac{dy}{y} y^{-Q} \left[y\psi_1(y) + yu_{k-1}\psi_2(y,u_{k-1}) + a_1 u_{k-1}^2 \right].$$

Пусть $\psi_1(x) \sim \alpha x^n$ при $x \to 0$. Предположим, что $Q < n + 1$. Тогда методом математической индукции нетрудно доказать, что выполняются следующие свойства последовательности функций $u_k(x)$:

$$|u_k(x)| \leqslant c_1 x^{n+1}, \quad (10)$$

$$|u_k(x) - u_{k-1}(x)| \leqslant x^n (c_2 x)^k. \quad (11)$$

Свойство (10) означает, что все функции u_k существуют, а свойство (11) показывает, что последовательность функций u_k сходится равномерно (вместе с производными) к некоторой функции $u(x)$ по крайней мере в области $x < c_2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, причем предельная функция удовлетворяет (8) и (6) (последнее следует из равномерной сходимости).

Пусть теперь $Q > n + 1$. Введем в рассмотрение новую функцию v:

$$u(x) = \frac{\alpha x^{n+1}}{n + 1 - Q} + v(x), \tag{12}$$

которая удовлетворяет уравнению вида (6):

$$xv^1 = Qv + x\widetilde{\psi}_1(x) + xv\widetilde{\psi}_2(x,v) + a_1 v^2, \tag{13}$$

где функция $\widetilde{\psi}_2$ несингулярна при x и v, стремящихся к нулю, а $\widetilde{\psi}_1$ ведет себя при $x \to 0$ по крайней мере как x^{n+1}. Пусть $\widetilde{\psi}_1(x) \sim \beta x^{n+m}$ при $x \to 0$, $m \geqslant 1$. Тогда можно доказать существование решения уравнения (13) уже в более широкой области $Q < n + m + 1$ со свойством $|V(x)| < cx^{n+m+1}$. Так как Q фиксировано, после конечного числа шагов типа $u \to v \to \ldots$ мы придем к функции и соответствующему дифференциальному уравнению, для которого можно будет доказать существование решения. Наконец возможен случай, когда после некоторого числа шагов типа подстановки (12) мы приходим к ситуации $x\widetilde{\psi}_1(x) \sim \alpha x^1$ при $x \to 0$ и, кроме того, $Q = 1$. Именно, предположим, что в уравнении (6) $Q = n + 1$. Тогда введем функции V с помощью соотношения:

$$u(x) = \alpha x^{n+1} \ln x + v(x). \tag{14}$$

Функция $v(x)$ будет удовлетворять уравнению (13), где функция $\widetilde{\psi}_2$ несингулярна при $x \to 0$ и $v \to 0$, а функция $\widetilde{\psi}_1$ имеет поведение $\sim \beta x^{n+1}$ при $x \to 0$ уже только с логарифмической точностью. Поэтому все оценки типа (10), (11) будут справедливы с логарифмической точностью, что однако не портит сходимости интегралов типа (9) и равномерной сходимости последовательных приближений.

Если зарядов z несколько, тогда под Q нужно понимать матрицу, x^Q нужно заменить на $\exp(Q \ln x)$, неравенство $Q < n + 1$ следует понимать в том смысле, что действительные части всех собственных значений Q меньше $n + 1$, и т.п. Все остальные рассуждения дословно переносятся на случай нескольких зарядов.

Наконец, отметим, что если после ряда подстановок типа (I2) мы придем к ситуации $x\Psi_1(x)\sim\beta x^1$, $Q<1$, то из проведенного рассмотрения вытекает, что решение $z(x)$ можно строить в рамках теории возмущений по x.

Автор благодарит И. Баталина, Б. Воронова, С. Конштейна за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
5 мая I978 г.

Литература

I. Б. Л. Воронов, И. В. Тютин, Лекция на УШ Всесоюзной школе по физике элементарных частиц, Ереван, 8 - I9 апреля, I975; ЯФ, 23, 664 (I976). E. S. Fradkin, O. K. Kalashnikov, J. Phys., A8, 1814 (1975); Phys. Lett., 64B, 177 (1976). E. S. Fradkin, O. K. Kalashnikov, S. E. Konstein, Lett. Nuovo Cim., 21, 5 (1978).