Краткие сообщения по физике № 1 1977

СОВМЕСТИМА ЛИ МИКРОПРИЧИННОСТЬ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РОСТОМ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ?

М. А. Соловьев, В. Я. Файнберг

УДК 530.145

Исследуется вопрос об условиях причинности в теориях поля с неполиномиальным ростом матричных элементов в импульсном представлении. Показано, что экспоненциальный рост не совместим микропричинностью.

В 1964 году Мейманом /1/ было показано, что в теории поля, матричные элементы которой растут в импульсном представлении медленнее любой линейной экспоненты, можно сформулировать условие микропричинности. В этой же работе утверждалось, что рост с конечным типом $\sim \exp\{l\|p\|\}$ уже противоречит микропричинности.

В работах /2/ был исследован класс теорий с таким ростом, причем микропричинность нарушалась на расстояниях порядка l. Однако в работе /3/ было высказано мнение, что микропричинность можно сформулировать и в этом случае, если ограничиться определенным классом обобщенных функций. Этот класс эффективно использовался Ефимовым для построения унитарной нелокальной лагранжевой теории поля (см., напр., /4/). В данной заметке мы обсудим этот вопрос и покажем, что микропричинность не совместима с экспоненциальным ростом вайтмановских функций в импульсном представлении. При этом мы будем опираться на результаты работ /5/, где был найден соответствующий критерий. Обычно функция распространения K считается микропричинной, если $(K,\varphi) = 0$ для любой пробной функции φ, носитель которой не пересекается с верхним световым конусом V_+. В случае экспоненциального роста это определение неприменимо, поскольку такому росту соответствуют аналитические пробные функции, которые не могут обращаться в нуль тождественно в открытом множестве. Само по себе это не является значительной трудностью. Мы можем по-прежнему считать функционал K микропричинным, если (K,φ) близко к нулю для пробных функций, близких к нулю в окрестности V_+. Для реализации этой идеи в работе /3/ введено понятие проектирующих последовательностей. Именно, каждой ограниченной замкнутой области M в R^4 сопоставляется множество последовательностей пробных функций φ_ν, аналитических в комплексном пространстве C^n и обладающих тем свойством, что если x не принадлежит M, то $\varphi_\nu(x + iy) \to 0$ при любом y. Компакт M при этом называется носителем последовательности φ_ν. Полное определение см. в /3/. В работе /3/ показано, что для нелокальных функционалов, используемых в /4/,

$$(K, \varphi_\nu) \to 0 \qquad (\nu \to \infty) \tag{I}$$

если носитель φ_ν не пересекается с V_+. При этом существенна равномерность сходимости φ_ν. Однако, используя те же рассуждения, нетрудно убедиться, что проектирующие последовательности не позволяют проверить точно локальные свойства даже обычных функционалов умеренного роста. Покажем это, считая для простоты пространство-время двумерным.

Теорема. Пусть $f = \delta(x^2 + 1)$, $x^2 = x_0^2 - x_1^2$, и пусть M – произвольный компакт, содержащийся в пространственноподобной области $x^2 < 0$ и пересекающийся с носителем f. Если последовательность целых пробных функций $\varphi_\nu(z)$ сходится к нулю в области $\{z = (z_0, z_1) : \operatorname{Re} z \notin M, \operatorname{Im} z \in R^2\}$, причем сходимость равномерна на компактах, то $(f, \varphi_\nu) \to 0$ при $\nu \to \infty$.

Доказательство. Действие функционала f на пробную функцию φ_ν можно записать в следующем виде:

$$(f, \varphi_\nu) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi_\nu(\operatorname{sh}\eta, \operatorname{ch}\eta) + \varphi_\nu(\operatorname{sh}\eta, -\operatorname{ch}\eta)]\, d\eta. \tag{2}$$

Будем для определенности считать, что компакт M расположен в области $x^2 < 0$, $x_1 > 0$. Тогда сходимость к нулю второго слагаемого очевидна, а в первом мы заменим участок интегрирования от $-\eta_0$ до η_0 на контур из следующих кусков

$$C_1 = \{\zeta = \eta + i\theta \ : \ \eta = -\eta_0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \tfrac{\pi}{2}\}$$

$$C_2 = \{\zeta = \eta + i\theta \ : \ -\eta_0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0, \quad \theta = \tfrac{\pi}{2}\}$$

$$C_3 = \{\zeta = \eta + i\theta \ : \ \eta = \eta_0, \quad 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}\}.$$

Вычислим действительные части x_0, x_1 комплексных переменных z_0, z_1 на C_1, C_2, C_3. Имеем, соответственно

$$x_0 = -\operatorname{sh}\eta_0\cdot\cos\theta,\quad x_1 = \operatorname{ch}\eta_0\cdot\cos\theta \tag{3}$$

$$x_0 = x_1 = 0$$

$$x_0 = \operatorname{sh}\eta_0\cdot\cos\theta,\quad x_1 = \operatorname{ch}\eta_0\cdot\cos\theta. \tag{4}$$

Формулы (3), (4) описывают лучи в R^2, соединяющие начало координат с точками гиперболоида $x_1 = \sqrt{x_0^2 + 1}$, соответствующими значениям параметра $\eta = \mp\eta_0$. Если η_0 достаточно велико, эти лучи близки к световому конусу и не пересекают компакт М. При этом контур С целиком лежит в области сходимости последовательности $\varphi_\nu(z)$ к нулю, что и доказывает теорему.

Доказанная теорема прежде всего показывает, что требование сходимости к нулю при любых $\operatorname{Im}z$, участвующее в определении проектирующих последовательностей, является излишне сильным. Оно не учитывает тот факт, что теория имеет характерный параметр l. Если в импульсном представлении он показывает, как растут функционалы на бесконечности, то в координатном он означает, что определяющие их комплексные меры не выходят из слоя $|\operatorname{Im}z| < l$ вдоль вещественного пространства. Поведением внутри этого слоя и должны определяться локальные свойства теории. В частности, в определении проектирующих последовательностей естественно требовать сходимости к нулю лишь при $|\operatorname{Im}z| < l$. При этом мы по-прежнему можем деформировать контур на величину l и проектирующие последовательности позволяют проверить локальные свойства функционалов лишь с этой точностью. Суть дела проясняется, если заметить /6/, что множество $\{z : \operatorname{Re}z \notin M, |\operatorname{Im}z| < l\}$ не является областью голоморфности для ограниченных М, поскольку на части границы этой области, примыкающей к М, нарушается условие псевдовыпуклости. В простейшем случае, когда М - круг радиуса r, в R^2 можно явно вычислить /6/ голоморфно выпуклую оболочку этой части границы, т. е. множества $\left\{z \in C^2 : \|x\| = r, |y_i| \leqslant l, i = 0,1\right\}$. Оказывается, что оболочка содержит кольцо $l^2 - r^2 \leqslant \|x\|^2 \leqslant r^2$ вещественного пространства, а при $l \geqslant r$ содержит все множество М. Это означает, что равномерная сходимость последовательности целых функций к нулю в области $\{z : \mathrm{Re}\, z \notin M, |\mathrm{Im}\, z| < l\}$ влечет ее сходимость к нулю на части M, а при достаточно больших l всюду на M. В частности, не существует проектирующих последовательностей, сходящихся к характеристической функции множества M *). В предельном случае $l \to 0$ оболочка стягивается к самой области. Можно сказать, что в неймановском случае $(l \to 0)$ поле локализуемо в сколь угодно малых пространственно-временных областях, а при конечных l лишь в областях, больших по сравнению с l. Соответствующее обобщение локальной коммутативности /3-5/ при этом утрачивает смысл микроскопичности, но мы думаем, что при малых l оно обеспечивает макропричинность.

Замечание. В работе /3/ построен пример последовательности, сходящейся к характеристической функции множества M. Однако сходимость к нулю в области $\{z : \mathrm{Re}\, z \notin M\}$ при этом не является равномерной на компактах и условие (I) не соблюдается, поскольку интеграл по деформированной части контура не стремится к нулю.

В заключение рассмотрим пример нелокальной функции распространения, иллюстрирующий сказанное. Пусть

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{l}{2}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{(n!)^2} \Box^n \delta(x), \tag{5}$$

где пространство-время по-прежнему считается двумерным. В импульсном представлении $\tilde{K}(p) = J_0(l\sqrt{-p^2})$, где J_0 - функция Бесселя. $\tilde{K}(p)$ растет при $p^2 \to +\infty$ и убывает при $p^2 \to -\infty$. Этот функционал удовлетворяет условию (I) (см. /3/). С другой стороны, рассмотрев его свертку с голоморфной функцией $1/z^2 (z^2 = z_0^2 - z_1^2)$, мы получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{l}{2}\right)^{2n} \frac{1}{(n!)^2} \Box^n \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2 + l^2} \qquad \text{при} \qquad |z^2| > l^2.$$

Соответственно сдвигаются с конуса $x^2 = 0$ на гиперболоид $x^2 + l^2 = 0$ сингулярности тех обобщенных функций, которые являются граничными значениями данной голоморфной. В частности, рассмотрев разность $\left[x_0^2 - (x_1 + i\varepsilon)^2\right]^{-1} - \left[x_0^2 - (x_1 - i\varepsilon)^2\right]^{-1} = 2\pi i \varepsilon(x_1)\delta(x^2)$,

---

*) Одномерный случай при этом выступает как особый, поскольку в C^1 всякая область есть область голоморфности.

мы получим интересный пример обобщенной функции умеренного роста, которую операция свертки с нелокальным функционалом К переводит в обобщенную функцию умеренного роста с другим носителем

$$K * \left[\varepsilon(x_1)\delta(x^2)\right] = \varepsilon(x_1)\delta(x^2 + l^2).$$

Граничные значения функции $1/z^2$ при $\operatorname{Im} z_0 \to \pm 0$ допускают интерпретацию в терминах теории поля. Именно, функцию $\frac{1}{\pi}\frac{1}{(x_0 + i\varepsilon)^2 - x_1^2}$ можно рассматривать как двумерный пример Δ^+-функции, определяемой представлением Челена-Лемана с плотностью $\rho(m^2) \equiv 1$

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{(x_0 + i\varepsilon)^2 - x_1^2} = \int_0^\infty \rho(m^2)\Delta^+(x,m^2)dm^2,$$

где

$$\Delta^+(x,m^2) = \frac{1}{2\pi i}\int \theta(p_0)\delta(p^2 - m^2)e^{ipx}d^2p.$$

Свертка с функционалом К переводит ее в Δ_l^+-функцию нелокальной теории, определяемую экспоненциально растущей плотностью $\rho(m^2) = J_0(ilm)$. На пробную функцию φ она действует следующим образом:

$$(\Delta_l^+,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int \frac{\varphi(x_0 + iy, x_1)}{(x_0 + iy)^2 - x_1^2 + l^2}\, dx_0 dx_1, \quad \text{где} \quad y > l.$$

Функция Δ_l^- определяется интегралом с другим знаком перед y. Разность $\Delta_l^+ - \Delta_l^- = K * \Delta$ является двумерным аналогом усредненного по вакууму коммутатора $\Delta_l(x) = i\langle 0|\left[A(x/2), A(-x/2)\right]|0\rangle$. Конечно, такая интерпретация в значительной мере условна, однако показывает, что форм-факторы типа (5) приводят к особенностям вне конуса, разрушающим микропричинность теории.

Поступила в редакцию
7 июля 1976 г.

Литература

1. Н. Н. Мейман. ЖЭТФ, 47, 1966 (1964).
2. М. З. Иофа, В. Я. Файнберг. ЖЭТФ, 56, 1644 (1969); ТМФ, 1, 187 (1969).
3. В. А. Алебастров, Г. В. Ефимов. Препринт Р2-7572, Дубна, 1973 г.
4. Г. В. Ефимов. Проблемы физики ЭЧАЯ, том I, вып. I, стр. 256, Атомиздат, 1970 г.
5. М. А. Соловьев. ТМФ, 20, 299 (1974); М. А. Соловьев, В. Я. Файнберг. Труды Международной конференции по нелокальной квантовой теории поля, 1976 г., в печати.
6. М. А. Соловьев, В. Я. Файнберг. Препринт ФИАН, № 152, 1976 г., в печати.