Краткие сообщения по физике № 1 1977

МЕТОД ПРОИЗВОДЯЩИХ ИНВАРИАНТОВ В ТЕОРИИ SU_n-СИММЕТРИЙ

В. П. Карасев, Л. А. Шелепин

УДК 53.01

Предложен новый подход в теории коэффициентов Клебша-Гордана групп SU_n, основанный на построении производящих инвариантов с помощью дифференциальных инвариантных операторов. Приведены типовые расчетные формулы и показана эффективность метода.

Группы SU_n играют важную роль в теории элементарных частиц, в атомной и ядерной спектроскопии, в теории когерентного излучения /I,2/. Однако до настоящего времени для этих групп (при $n>2$) нет эффективной теории коэффициентов Клебша-Гордана (коэффициентов КГ), необходимой для успешного анализа сложных физических систем, исследования их симметрий и взаимосвязей между ними. Ниже кратко излагается новый подход, который дает возможность формализовать и существенно продвинуть применение в физике математического аппарата групп SU_n. В основе этого подхода лежит использование дифференциальных производящих инвариантов, впервые предложенное в/3/ для группы SU_2 - теории угловых моментов (ТУМ). Как известно, векторные дифференциальные операторы $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n)$, $\bar{x}_k \equiv \partial/\partial x_k$, преобразуются по неприводимому представлению (НП) $D(0\ldots01)SU_n$, а построенные из них детерминанты $[\bar{x}\bar{y}\ldots\bar{z}] \equiv \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \bar{x}_{i_1} \bar{y}_{i_2} \ldots \bar{z}_{i_n}$ (операторы Кэли n-го ранга Ω_n /4/) инвариантны по отношению к преобразованиям соответствующих групп SU_n. В /3/ была показана фундаментальная роль оператора Ω_2 в ТУМ (при построении коэффициентов КГ группы SU_2 k-го ранга ($k>2$) и их соединений).

В настоящей работе методика /3/ обобщается на случай разработки (удобного для физических приложений) аппарата произвольных групп SU_n. В получающейся общей теории существенны два качественных момента.

Первый из них состоит в определении формальных правил действия операторов Кэли на различные SU_n-ковариантные величины. Они базируются на свойствах Ω_n как однородного полилинейного дифференциального оператора. Приведем некоторые типовые формулы, дающие основу для конкретных расчетов:

$$\text{а)}\ [\bar{x}^k\bar{x}^l]^I[x^1x^2x^3]^J = (J+1)^{(I)}J^{(I)}[x^1x^2x^3]^{J-I}(\varepsilon_{klm}x_3^m)^I,$$

$$\text{б)}\ [\bar{x}^k\bar{x}^l]^I[x^1x^2x^3x^4]^J = (J+1)^{(I)}J^{(I)}[x^1x^2x^3x^4]^{J-I}(\varepsilon_{klmn}x_3^m x_4^n)^I,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (1)$$

$$\text{а)}\ [\bar{x}^1\ldots\bar{x}^n]^I[x^1\ldots x^n]^J = \prod_{l=0}^{n-1}(J+l)^{(I)}[x^1\ldots x^n]^{J-I},$$

$$\text{б)}\ [\bar{x}^1\ldots\bar{x}^n]^S[x^1\ldots x^m u^{m+1}\ldots u^n]^I[x^1\ldots x^n]^J =$$

$$= \prod_{k=0}^{n-m-1}(J+k)^{(S)}\prod_{l=n-m}^{n-1}(J+I+l)^{(S)}[x^1\ldots x^m u^{m+1}\ldots u^n]^I[x^1\ldots x^n]^{J-S}$$

$$(1\leqslant m<n). \qquad (2)$$

$$\text{а)}\ [\bar{x}^1\bar{x}^2\bar{x}^3]^S[x^1u^2u^3]^I[x^1x^2x^3]^J =$$

$$= (J+I+2)^{(S)}(J+1)^{(S)}J^{(S)}[x^1u^2u^3]^I[x^1x^2x^3]^{J-S},$$

$$\text{б)}\ [\bar{x}^1\bar{x}^2\bar{x}^3]^S[x^1x^2u^3]^I[x^1x^2x^3]^J =$$

$$= (J+I+2)^{(S)}(J+I+1)^{(S)}J^{(S)}[x^1x^2u^3]^I[x^1x^2x^3]^{J-S},$$

$$(3)$$

$$\text{в)}\ [\bar{x}^1\bar{x}^2\bar{x}^3]^S[x^1x^2u^3]^J[u^1u^2x^3]^I =$$

$$= I^{(S)}J^{(S)}(J+1)^{(S)}[x^1x^2u^3]^{J-S}[u^1u^2x^3]^{I-S}[u^1u^2u^3]^S,$$

$$\text{г)}\ [\bar{x}^1\bar{x}^2\bar{x}^3]^S[x^1u^2u^3]^I[u^2x^2x^3]^J[x^1x^2x^3]^L =$$

$$= (J+I+L+2)^{(S)}(J+L+1)^{(S)}L^{(S)}[x^1u^2u^3]^I[x^1x^2x^3]^{L-S}[u^2x^2x^3]^J,$$

$$\text{д)}\ [\bar{x}^1\bar{x}^2\bar{x}^3]^S[x^1x^2u^3]^J = J^{(S)}(J+1)^{(S)}[x^1x^2u^3]^{J-S}(u^3\bar{x}^3)^S,$$

$$е)\ [\bar{x}^1\bar{x}^2\bar{x}^3]^S[x^1u^2u^3]^J = J^{(S)}[x^1u^2u^3]^{J-S}\begin{vmatrix}(u^2\bar{x}^2) & (u^3\bar{x}^2)\\ (u^2\bar{x}^3) & (u^3\bar{x}^3)\end{vmatrix}^S.$$

Здесь и далее $A^{(m)}$ – обобщенная степень числа A, $(u^i\bar{x}^k)$ – операторы поляризации /4/, верхние индексы нумеруют векторы; $\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix} = ad - bc$; формулы (3д,е) имеют операторный смысл.

Второй качественный момент заключается в универсальной роли операторов Кэли при разработке аппарата SU_n-симметрий. В обычной теории инварианты строятся с помощью коэффициентов КГ из векторных аргументов $x,y,\ldots$ /I,2/. Однако аналогичные построения можно проводить, используя вместо векторов x^k операторы $\bar{x}^k = (\bar{x}^k_1,\ldots\bar{x}^k_n)$. Таким образом, может быть построена двуединая теория групп SU_n, симметричным способом включающая ковариантные соединения обычных векторов и дифференциальных операторов. В рамках этой теории возникают как частные случаи I) аппарат инфинитезимальных операторов (представляющих определенные комбинации $\bar{x}^i_m, x^j_l$), 2) функциональная реализация проекционных операторов, 3) определение (вычисление) матриц конечных преобразований $D^{[P]}_{\nu\nu'}(g)$. Вместе с тем открывается ряд новых возможностей, не содержащихся в обычной теории.

Так, предлагаемый подход оказывается весьма эффективным при построении соединений $n\times n$ – символов – фундаментальных величин общей теории коэффициентов КГ SU_n /I/, поскольку в его рамках можно легко получать аналитические выражения для любых соединений $n\times n$ – –символов. Приведем в качестве примера формулу для суммы двух 4х4 – символов:

$$\sum_{\substack{\sum_i a_i=J\\ \sum_j b_j=J}}\begin{Vmatrix}R_{11}R_{12}R_{13}R_{14}\\ R_{21}R_{22}R_{23}R_{24}\\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}R'_{11}R'_{12}R'_{13}R'_{14}\\ R'_{21}R'_{22}R'_{23}R'_{24}\\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\end{Vmatrix} =$$

$$= \prod_{\alpha=1}^{2}\prod_{i=1}^{4}\frac{(\bar{\xi}^i_\alpha)^{R'_{\alpha i}}(\bar{u}^i_\alpha)^{R_{\alpha i}}}{[R'_{\alpha i}!\,R_{\alpha i}!]^{1/2}}\begin{vmatrix}(u_1\xi_1) & (u_2\xi_1)\\ (u_1\xi_2) & (u_2\xi_2)\end{vmatrix}^J\frac{1}{J!} =$$

$$= \prod_{i=1}^{4} \delta_{R_{1i}+R_{2i},R'_{1i}+R'_{2i}} \prod_{\alpha=1}^{2} [R'_{\alpha i}!R_{\alpha i}!]^{1/2} \times$$

$$\times \sum_{\sum_{i=1}^{4} k_i+S=y} \frac{(-1)^S (J-S)!S!}{\prod_{i=1}^{4} k_i!(R_{2i}-k_i)!(R'_{2i}-k_i)!(R'_{1i}-R_{2i}+k_i)!}, \qquad (4)$$

где $(u_\alpha \xi_\beta) = \sum_{i=1}^{4} u_\alpha^i \xi_\beta^i$. С физической точки зрения подобные соотношения имеют большое значение, так как позволяют значительно расширить (ограниченные до сих пор /I,5/) возможности приложения (nxn--символов, в частности, в исследовании сложных физических систем и взаимосвязи симметрий (ср. с/I,2/). Отметим, что благодаря наличию групп гомологий и когомологий (из-за одновременного использования x^i и $\bar{x}^k$) здесь появляется перспектива применения современных методов алгебраической топологии (ср. с /I/).

Другим важным направлением приложения развиваемой теории является последовательное построение производящих инвариантов для коэффициентов КГ групп SU_n и их соединений. Оно осуществляется согласно рекуррентной схеме, которая в основном аналогична методике /3/ для соответствующих величин ТУМ. Проиллюстрируем это на примере. Возьмем в качестве исходного инвариант (для простоты опускаем нормировочные множители)

$$J_1^{P_1 P_2 Q}(uv;x;y) = [uvx]^{P_1-Q}[uvy]^{P_2-Q}[uxy]^Q, \qquad (5)$$

соответствующий связыванию трех НП $SU_3: D(P_1 0)\times D(P_2 0)\times D(QP_1 + P_2-2Q)\to D(00)$, причем базисы этих НП реализованы однородными полиномами векторных аргументов x ($D(P_1 0)$), y ($D(P_2 0)$) и u,v ($D(QP_1+P_2-2Q)$). Применяя к (5) инвариантный оператор

$$J_2^{P_1 P_3 U}(\xi\eta;\zeta;\bar{x}) = [\xi\eta\bar{x}]^{P_1-U}[\xi\eta\zeta]^{P_3-U}[\xi\zeta\bar{x}]^U \qquad (6)$$

(ξ,η,ζ - векторы НП $D(01)$), получим производящий инвариант

$$\Gamma_3 = [\xi\eta\zeta]^{P_3-U}[uvy]^{P_2-Q}\sum_{\alpha\geq 0}(P_1-U)^{(\alpha)}(P_1-Q)^{(P_1-Q-\alpha)}U^{(Q-\alpha)}Q^{(\alpha)}\times$$

$$\times\begin{vmatrix}(y\xi)(u\xi)\\(y\eta)(u\eta)\end{vmatrix}^{\alpha}\begin{vmatrix}(y\zeta)(u\zeta)\\(y\xi)(u\xi)\end{vmatrix}^{Q-\alpha}\begin{vmatrix}(u\zeta)(v\zeta)\\(u\xi)(v\xi)\end{vmatrix}^{U-Q+\alpha}\begin{vmatrix}(u\xi)(v\xi)\\(u\eta)(v\eta)\end{vmatrix}^{P_1-U-\alpha},$$

$$(u\xi)\equiv\sum_{i=1}^{3}u_i\xi_i,\ldots, \qquad (7)$$

соответствующий редукции $D(P_2O)\times D(QP_1+P_2-2Q)\times D(OP_3)\times D(P_1+P_3-2UU)\to D(OO)$. Накладывая условие $(\zeta y) = 0$, из (7) получим инвариант, отвечающий частному случаю связывания трех НП SU_3 общего вида. В рамках развиваемого подхода резко упрощается и решение одной из сложных проблем теории коэффициентов КГ – вычисление нормировки (базисных) производящих инвариантов. Эта задача разбивается на две. Первая из них – получение нормированных инвариантов $J(\{x^i\}_{i=1,\ldots k})$, построенных из k векторов, осуществляется почти автоматически, если определить скалярное произведение $(R(x), R'(x))$ в пространстве однородных полиномов $R(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}$ соотношением

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}, \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i'}\right)\equiv\prod_{i=1}^{n}\bar{x}_i^{p_i}x_i^{p_i'}, \qquad \sum_{i=1}^{n}p_i=\sum_{i=1}^{n}p_i'=P. \qquad (8)$$

Отметим здесь значительную аналогию со швингеровской схемой, использующей операторы a_i^+, a_j /6/, но при данном способе вычисления прощаются благодаря использованию формул типа (I) – (3)). Вторая задача – перенормировка инвариантов $J(\{x^i\})$ (чтобы считать их производящими для определенных коэффициентов КГ) – осуществляется умножением на дополнительный фактор ρ, отражающий согласование стандартного скалярного произведения для компонент канонических базисов НГ с (8). Так, для редукции $D(PQ)\times D(QP)\to D(OO)$ с реализацией базисов НП в функции от векторов u, v и x, y имеем

$$[(1/2)(P+Q+2)(P+Q+1)!\,P!\,Q!]^{-1/2}[uxy]^P[uvx]^Q =$$

$$= [(1/2)(P+Q+2)(P+1)(Q+1)]^{-1/2}[uxy]^P[uvx]^Q,$$

$$\rho = (P+Q+1)!\,P!\,Q!\,[(P+1)!(Q+1)!]^{-1/2}. \qquad (9)$$

Таким образом, можно получать замкнутые схемы для построения производящих инвариантов для коэффициентов КГ произвольных групп SU_n.

Поступила в редакцию
12 июля 1976 г.

Литература

1. Л. А. Шелепин. Труды ФИАН, 70, 3 (1973).
2. В. П. Карасев. Труды ФИАН, 70, 147 (1973).
3. В. П. Карасев. Краткие сообщения по физике ФИАН, №4, 21 (1976).
4. Г. Вейль. Классические группы, их инварианты и представления. ИЛ, М., 1947 г.
5. A. Giovannini, D. A. Smith. In: Spectroscopic and Group-theoretical Methods in Physics.-Racah Memorial Volume. North Holland, Amsterdam, 1968, p. 89.
6. J. Schwinger. On Angular Momentum. U. S. Atomic Energy Commission, NYO-3071, 1952; G. E. Baird, L. C. Biedenharn. J. Math. Phys., 4, 1449 (1963).