УДК 535.1

О РАЗМЕРЕ И ОБЛАСТИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ФОТОНА

В. Ф. Ефимков, И. Г. Зубарев, О. Н. Крохин, С. И. Михайлов

Общепринято, что размер фотона равен его длине волны. Но авторы работы [4] наблюдали интерференцию единичных фотонов при разности длин плеч интерферометра Маха–Цандера много больше длины волны используемых фотонов. Это ставит вопрос об области локализации фотонов, которому и посвящена настоящая работа.

Ключевые слова: фотон, волновая функция, когерентность, интерференция.

Вопросы о том, что такое фотон [1] и существуют ли экспериментальные доказательства его наблюдения, в литературе возникали несколько раз. Теория фотоэффекта Эйнштейна на самом деле не доказывала факт существования фотона, а использовала его в качестве гипотезы. И действительно, авторы работы [2] построили теорию фотоэффекта, не прибегая к понятию фотона, а рассматривали излучение в виде классической электромагнитной волны. Попытка экспериментально доказать факт существования фотона была предпринята авторами работы [3]. Цель не была достигнута, но полученные в работе результаты вызвали большой интерес, и в итоге рядом авторов была разработана теория фотоотсчётов. Было установлено, что для правильной постановки эксперимента по наблюдению фотона необходимо разработать источник единичных фотонов. Такой успешный эксперимент был реализован авторами работы [4]. Они измеряли коэффициент антикорреляции показаний фотоприёмников, регистрирующих фотоны, прошедшие и отражённые от светоделительной пластинки (см. рис. 1 из работы [4]). При уменьшении светового потока до нуля они получили коэффициент антикорреляции, равный нулю в соответствии с теорией. Т.е. фотоны экспериментально были обнаружены.

Для борьбы с шумами авторы работы использовали короткие строб-импульсы, в течение которых производились фотоотсчёты с приёмников, т.е. они неявно предполагали, что фотоны в пространстве имеют небольшую протяжённость. Однако затем авторы запустили полученные ими единичные фотоны в интерферометр Маха–Цандера

ФИАН, 119991 Россия, Москва, Ленинский пр-т, 53; e-mail: zubarev@sci.lebedev.ru.

(рис. 3 из работы [4]), и они наблюдали интерференцию единичных фотонов. Обычно предполагается, что размер фотона равен его длине волны, поскольку именно эта величина следует из соотношения неопределенности Гейзенберга для фотона [5]. Кстати, по мнению авторов [5], именно поэтому фотон не имеет волновой функции в координатном пространстве. Но авторы работы [4] наблюдали интерференцию единичных фотонов, когда разность длин плеч интерферометра Маха–Цандера превосходила длину волны используемых ими фотонов (см. рис. 4 из работы [4]). Более того, как видно из рис. 4 работы [4], видность интерференционной картины не меняется в исследованном диапазоне разностей длин плеч интерферометра. Это значит, что интерференция единичных фотонов в данном эксперименте могла бы наблюдаться при разности длин плеч интерферометра много больше длины волны фотона. Тогда возникает вопрос, а какая величина определяет предельное значение разности длин плеч интерферометра для наблюдения интерференции единичных фотонов?

Мы попытаемся оценить размер области локализации единичного фотона. В квантовой механике каждой частице сопоставляется волновая функция, которая является решением некоего волнового уравнения, как, например, уравнения Шредингера, Дирака и т.д. Волновая функция определяет те собственные значения, которые может принимать наблюдаемая величина. Поэтому и для фотонов необходимо сформулировать аналогичные функции и уравнения. Так как масса покоя фотона равна нулю, то для фотона не существует классической (т.е. нерелятивистской) области движений и энергий. Поэтому квантовая механика фотона с самого начала должна быть релятивистской теорией, т.е. соответствующие уравнения для волновой функции фотона должны быть инвариантны относительно преобразования Лоренца.

Поэтому в качестве квантово-механических уравнений движения фотона естественно принять уравнения Максвелла, которые лоренц-инвариантны [5]. Тогда волновые свойства фотона будут совпадать со свойствами электромагнитного поля. Этого, как сказано в книге [5], вместе с соотношением для энергии фотона $w = h\omega$ достаточно для построения теории фотонов и их взаимодействия с заряженными частицами. Из уравнений Максвелла для поля электромагнитной волны $E(x, t)$ получается стандартное волновое уравнение

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)E = 0.$$

Совершим фурье-преобразование для амплитуды волны $E(x,t) = \int \varepsilon(k,t)e^{ikx}dk$, тогда уравнение для $\varepsilon(k,t)$ примет вид

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + k^2\right)\varepsilon(k,t) = 0,$$

что эквивалентно двум уравнениям $\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + ik\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - ik\right)\varepsilon(k,t) = 0.$

Возьмём первое уравнение $\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + ik\right)\varepsilon(k,t) = 0$, умножим его на $i\hbar$ и получим

$$i\hbar\frac{\partial\varepsilon(k,t)}{\partial t} = \hbar ck\varepsilon(k,t).$$

Частоту волны определим как $\omega = ck$, и тогда это уравнение есть уравнение Шредингера для фотона. При этом $\varepsilon(k,t)$ – это волновая функция фотона в k-пространстве, а $\hbar\omega$ – собственное значение оператора энергии (гамильтониана).

Покажем, что $\varepsilon(k,t)$ действительно является волновой функцией фотона в k-пространстве (пространстве волновых векторов), а заодно осуществим её нормировку. Для этого воспользуемся выражением для энергии электромагнитной волны в некотором выбранном нами (и достаточно большом) объёме

$$w = \int\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}\right)dV.$$

Из уравнений Максвелла имеем соотношение $\sqrt{\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu_0}H$, и поэтому получим, что $w = \int \varepsilon_0 E^2 dV$. Перейдём от действительной амплитуды волны E к комплексной $E^2 = \frac{|E|^2}{2}$, а объём представим как $dV = Sdx$. Здесь S – поперечное сечение светового пучка, которое часто кладут равным 1, но мы оставим его для сохранения размерности в формуле. Итак, получаем $w = \frac{S\varepsilon_0}{2}\int |E|^2dx$. В этом выражении выразим поле $E(x,t)$ через его фурье-компоненты $w = \frac{S\varepsilon_0}{2}\int[\int \varepsilon(k,t)e^{ikx}dk][\int \varepsilon^*(k',t)e^{-ik'x}dk']dx$. Вычислим интеграл по x:

$$\int e^{i(k-k')x}dx = 2\pi\delta(k-k').$$

С помощью δ-функции вычислим интеграл по dk' в приведённом выше выражении для энергии волны и получим $w = 2\pi\frac{S\varepsilon_0}{2}\int|\varepsilon(k,t)|^2dk$. Приравняем это выражение энергии одного фотона $\hbar\omega$: $w = \int(2\pi\varepsilon_0 S)\frac{|\varepsilon(k,t)|^2}{2}dk = \hbar\omega$. Образуем нормированное значение энергии:

$$\int(2\pi\varepsilon_0 S)\frac{|\varepsilon(k,t)|^2}{2\hbar\omega}dk = 1.$$

Мы видим, что подынтегральное выражение есть нормированная плотность вероятности для волновой функции фотона в пространстве волновых векторов. Поэтому выражение $\left[\frac{2\pi\varepsilon_0 S}{2\hbar\omega}\right]^{1/2}\varepsilon(k,t)$ – есть нормированная волновая функция фотона в k-пространстве.

Как следует из вышесказанного, нельзя найти волновую функцию, квадрат модуля которой даёт вероятность нахождения фотона в заданной точке x. Но можно найти выражение, которое позволит определить вероятность нахождения фотона в некоторой области пространства, определяемой параметрами излучения. Этот результат необходим для нахождения предельной разности длин плеч интерферометра Маха–Цандера, при которой ещё может наблюдаться интерференция единичного фотона. Для этого рассмотрим волновой пакет. Реально в эксперименте мы всегда имеем дело с волновым пакетом. Итак, представим поле электромагнитной волны в виде волнового пакета

$$E(x,t)=\frac{1}{2\Delta k}\int\limits_{k-\Delta k}^{k+\Delta k}\varepsilon(k,t)e^{ikx}dk.$$

Здесь k – среднее значение волнового вектора, а $2\Delta k$ – его разброс. Подставим сюда полученное выше нормированное значение волновой функции в k-пространстве

$$E(x,t)=\left[\frac{2\pi\varepsilon_0 S}{2\hbar\omega}\right]^{1/2}\frac{1}{2\Delta k}\int\limits_{k-\Delta k}^{k+\Delta k}\varepsilon(k,t)e^{ikx}dk.$$

Мы рассматриваем типичный для экспериментов случай, когда разброс волновых векторов $\Delta k << k$, и поэтому $\varepsilon(k,t)$ мало меняется в этом интервале Δk по сравнению с величиной e^{ikx}. В связи с этим величину $\varepsilon(k,t)$ можно вынести из-под знака интеграла и в итоге получим

$$E(x,t)=\left[\frac{2\pi\varepsilon_0 S}{2\hbar\omega}\right]^{1/2}\varepsilon(k,t)\frac{1}{2\Delta k}\frac{1}{ix}e^{ikx}\left[\begin{array}{c}k+\Delta k\\ k-\Delta k\end{array}\right]=***=$$

$$=\left[\frac{2\pi\varepsilon_0 S}{2\hbar\omega}\right]^{1/2}\varepsilon(k,t)e^{ikx}\left(\frac{\sin(\Delta kx)}{\Delta kx}\right).$$

Функция $\mathrm{Sinc}(\Delta kx)=\left(\frac{\sin(\Delta kx)}{\Delta kx}\right)$, как известно, отлична от нуля в области $\Delta kx\le\pi$. Поэтому размер области $L_{\mathrm{coh}}=\frac{\pi}{\Delta k}$ называется длиной когерентности. Таким образом, выражение для реальной части поля $E(x,t)$ имеет вид, показанный на рис. 1.

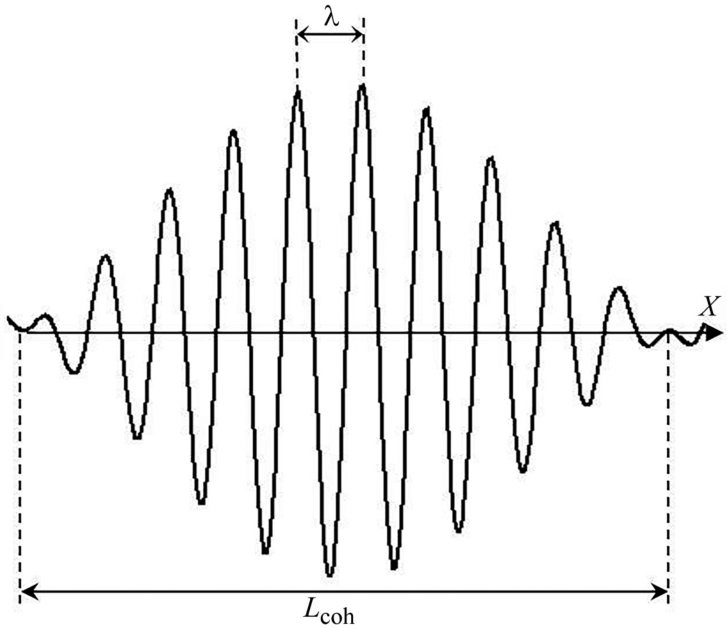

Рис. 1: *Реальная часть поля $E(x, t)$.*

Интерпретировать это выражение для $E(x, t)$ как волновую функцию фотона в координатном пространстве в прямом смысле слова нельзя. Т.е. квадрат модуля этой функции $|E(x, t)|^2$ не даёт вероятность нахождения фотона в заданной точке пространства. Дело в том, что наличие фотона может быть установлено только по его взаимодействию с зарядами. Но по самому смыслу определения фотона его размер не может быть меньше длины волны, и, следовательно, нельзя определить местоположение фотона с точностью лучше, чем его длина волны λ. Этот качественный результат подтверждается соотношением неопределенности Гейзенберга. А приведённая выше функция $E(x, t)$ по существу определяет область существования фотона с заданной степенью когерентности. Т.е. размер области существования фотона зависит от степени когерентности того источника излучения, из которого он получен. Этот же результат по существу следует из работы [6], хотя в явном виде он там не сформулирован. И именно эта величина, длина когерентности, по нашему мнению, определяет то предельное значение разности длин плеч интерферометра Маха–Цандера, при которой ещё наблюдается интерференция единичных фотонов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] А. П. Канавин, О. Н. Крохин, Квантовая электроника **48**(8), 711 (2018).

[2] W. E. Jr. Lamb, M. O. Scully, In *Polarisation, Matiere at Rayonnement* (Press University de France, 1969).

[3] R. Hanbury-Brown, R. Q. Twiss, Nature **177**, 27 (1956).

[4] P. Grangier, G. Roger, A. Aspect, Europhys. Lett. **1**(4), 173 (1986).

[5] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика* (М., Физматгиз, 1959).

[6] Я. Б. Зельдович, ДАН СССР **163**(6), 1359 (1965).

Поступила в редакцию 1 ноября 2018 г.

После доработки 1 ноября 2018 г.

Принята к публикации 21 декабря 2018 г.