УДК 530.1

ФЛУКТУАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ НИЗКОЧАСТОТНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ "РЕАЛЬНЫХ" ДИЭЛЕКТРИКОВ

А. К. Звездин

На основе уравнения Ланжевена для флуктуаций плотности заряда и усреднения по флуктуациям ширины запрещенной зоны диэлектрика построена модель, описывающая частотную зависимость электропроводности "неидеальных" диэлектриков. В определенной области низких частот электропроводность линейно зависит от частоты.

Определим электропроводность диэлектрического материала следующей формулой:

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{kT}\langle\int\limits_0^\infty \langle j(t)j(0)\rangle \exp(-i\omega t)dt\rangle, \tag{1}$$

где $\langle j(t)j(0)\rangle$ – корреляционная функция плотности тока, при этом внутренние скобки $\langle ...\rangle$ предполагают усреднение с матрицей плотности системы [1], T – температура, k – постоянная Больцмана. Внешнее усреднение $\langle ...\rangle$ в (1) означает усреднение по флуктуирующим параметрам "реального" диэлектрика, обладающего определенной концентрацией дефектов: вакансий, атомов внедрения, примесей, дислокаций, границами зерен и интерфейсов и т.д. Конкретная процедура этого усреднения определяется ниже. Именно это "внешнее" усреднение отличает формулу (1) от стандартной формулы Кубо, но это обобщение не выглядит неестественным. Квантовыми эффектами в (1) пренебрегается, ниже полагается также $\hbar\omega \ll kT$.

Согласно спектральной теории флуктуирующих величин [2], имеем:

$$j(\omega) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t j(t') \exp(-i\omega t')dt', \tag{2}$$

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\langle j(t')j(0)\rangle \exp(-i\omega t')dt' = S_I(\omega), \tag{3}$$

где $S_I(\omega)$ – спектральная плотность тока и

$$\overline{|j(\omega)|^2} = \frac{1}{2}S_I(\omega)\Delta f \tag{4}$$

– спектральная мощность токовых шумов, отнесенная к интервалу частот Δf. Сравнивая (1) и (3), получаем

$$\sigma = \frac{1}{4kT}\langle S_I(\omega)\rangle, \tag{5}$$

что составляет, по сути дела, содержание "обобщенной" флуктуационно-диссипативной теоремы [3].

Предположим, что низкочастотные флуктуации локальной плотности заряда $q(t)$ в диэлектрике подчиняются уравнению Ланжевеновского типа

$$\dot{q} + \frac{1}{\tau_M}q = K(t'), \tag{6}$$

где $\tau_M = (4\pi)^{-1}\rho$ – время Максвелла, ρ – локальное удельное сопротивление, $K(t')$ – Ланжевеновская случайная сила (Ланжевеновский источник), индуцирующая флуктуации плотности заряда. Из (6) следует для Фурье-компонент

$$(\dot{q})_\omega = \frac{K_\omega}{1 + (i\omega\tau_M)^{-1}}. \tag{7}$$

Следуя Ланжевеновскому подходу, предполагается, что $K(t')$ – белый шум, спектр которого K_ω постоянен вплоть до частот порядка частоты рассеяния электронов $\sim 10^{13}\,c^{-1}$.

Так как $j(\omega) \sim (\dot{q})_\omega$, то из (7) следует

$$\overline{|j_\omega|^2} = \frac{\overline{|K_\omega|^2}\omega^2\tau_M^2}{1+\omega^2\tau_M^2}, \tag{8}$$

где $\overline{|K_\omega|^2}$ можно определить из формулы Найквиста для мощности "белых" токовых шумов [3]: $\overline{|K_\omega|^2} = 2kT\rho^{-1}\Delta f$. Тогда из (4) и (8) следует

$$S_I(\omega) = 6\pi kT\frac{\omega^2\tau_M}{1+\omega^2\tau_M^2}. \tag{9}$$

Перейдем к усреднению спектральной функции $S_I(\omega)$ по флуктуирующим параметрам материала. Как видно из (9), $S_I(\omega)$ зависит только от локального удельного сопротивления ρ. Фундаментальным параметром, от которого зависит ρ, является ширина запрещенной зоны материала E_g. Примем для $\rho(E_g)$ следующую очевидную зависимость:

$$\rho = B \exp(E_g/2kT), \tag{10}$$

где $B = \text{const}$.

Учитывая эти замечания, определим внешнее усреднение в (1) следующим образом:

$$\langle ... \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... f(E_g) dE_g, \tag{11}$$

где $f(E_g)$ – нормированная на 1 плотность вероятности того, что данный локальный элемент диэлектрика характеризуется величиной E_g. Естественно было бы предположить, что $f(E_g)$ является функцией Гаусса, характеризуемой средним значением $\bar{E}_g$ и дисперсией $\delta E_g = \left(\overline{E_g^2} - \bar{E}_g^2\right)^{1/2}$. Однако для упрощения вычислений используем вместо гауссовской функции $f(E_g)$ следующее "квазиоднородное" распределение[1]:

$$f(E_g) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta E}, & |E_g - \bar{E}_g| \le \Delta E_g, \\ 0, & |E_g - \bar{E}_g| > \Delta E_g, \end{cases} \tag{12}$$

где $\Delta E \sim \delta E_g$.

Заметим, что из (10) следует:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\tau_M}{\tau_M} = \frac{dE_g}{2kT}. \tag{13}$$

Используя (5), (11), (12), (13), получим:

$$\langle S_I(\omega) \rangle = \frac{8\pi (kT)^2 \omega^2}{\Delta E} \int\limits_{\tau_{M1}}^{\tau_{M2}} \frac{d\tau_M}{1 + \omega^2 \tau_M^2} =$$

$$= \frac{8\pi (kT)^2 \omega}{\Delta E} (\text{arctg}\ \omega\tau_{M2} - \text{arctg}\ \omega\tau_{M1}), \tag{14}$$

[1]Подобная упрощенная процедура усреднения, хотя и в иных переменных и по иному поводу, используется в теории $1/f$-шума полупроводниковых приборов [4].

где

$$\tau_{M1,2} = (4\pi)^{-1} B \exp\left[\frac{\bar{E}_g \pm \Delta E}{kT}\right]. \qquad (15)$$

Подставляя (14) в (15), получим:

$$\sigma(\omega) = 2\pi \frac{kT}{\Delta E}\omega(\text{arctg}\ (\omega\tau_{M2}) - \text{arctg}\ (\omega\tau_{M1})). \qquad (16)$$

Из формулы (16) следует, что $\sigma(\omega)$ – четная функция ω. При $\omega \to 0$ $\sigma(\omega) \sim \omega^2$. В интервале $\frac{1}{\tau_{M2}} \leq |\omega| \leq \frac{1}{\tau_{M1}}$ функции $\langle S_I(\omega)\rangle$ и $\sigma(\omega)$ пропорциональны ω:

$$\sigma(\omega) = \pi^2 \frac{kT}{\Delta E}\omega Sgn\omega. \qquad (17)$$

Формулы (16), (17) завершают решение поставленной задачи.

Автор благодарен А. А. Волкову, обратившего его внимание на эту проблему и ознакомившего его с экспериментальными данными и А. А. Рухадзе за замечания и комментарии.

Работа поддержана проектами РФФИ (02–02–17389) и Интеграция (Б-0056).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика, М., Наука, 1971.

[2] Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику, ч. 1. Случайные процессы. М., Наука, 1976; Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. Н. Введение в статистическую радиофизику, ч.2. Случайные поля. М., Наука, 1978.

[3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика, ч. 1, М., Наука, 1976; Климонтович Ю. Л. Статистическая физика, М., Наука, 1982.

[4] Ван дер Зил А. Шумы при измерениях, М., Мир, 1979; (Van der Ziel A. Noise in measurements, John Wiley & Sons, 1976).

Институт общей физики
им. А. М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 12 января 2004 г.