Краткие сообщения по физике № 4 1977

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В УСЛОВИЯХ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ ВОЛНЫ НАКАЧКИ С НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМОЙ

А. Н. Стародуб

УДК 533.951

Показана возможность развития в неоднородной плазме абсолютной параметрической неустойчивости, обусловленной трансформацией в ленгмюровскую волну и низкочастотное возмущение в условиях сильной связи накачки с плазмой.

В условиях эксперимента возможна ситуация, в которой амплитуда волны накачки значительно превосходит найденный в /I/ порог неустойчивости, при которой волна накачки трансформируется в продольные высокочастотную и низкочастотную волны. В столь сильных полях может иметь место изменение дисперсионных свойств низкочастотной волны (в этом случае говорят о сильной связи волны накачки с плазмой). Поэтому в данной заметке изучается возможность абсолютной параметрической неустойчивости при такой сильной связи.

В условиях, когда амплитуда волны накачки столь велика, что частота ω низкочастотного возмущения превосходит ионнозвуковую частоту, система уравнений двухжидкостной гидродинамики и Максвелла приводит к следующему уравнению эйконала:

$$k_x^4 - 2k_\perp^2 p(x) k_x^2 + k_\perp^4 q(x) = 0, \qquad (I)$$

где

$$p(x) = 3k_\perp^2 r_D^2 + xL_N^{-1} + (1/12)k_y^2 r_E^2(x)\omega_{Li}^2(x)(k_\perp r_D \omega)^{-2},$$

$$q(x) = \left(\frac{x}{L_N} + 3k_\perp^2 r_D^2\right)^2 + \frac{1}{12}\frac{k_y^2 r_E^2(x)\omega_{Li}^2(x)}{k_\perp^2 r_D^2 \omega^2}\left(\frac{x}{L_N} + 3k_\perp^2 r_D^2\right) - \frac{4}{9}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}(k_\perp r_D)^{-4}.$$

Здесь r_D – дебаевский радиус электронов, ω_0 – частота волны накачки, $k_\perp^2 = k_y^2 + k_z^2$, а k_x, k_y, k_z – компоненты волнового вектора возмущений, ω_{Li} – ленгмюровская частота ионов. В плазме с линейным профилем, для которого ленгмюровская электронная частота $\omega_{Le}^2(x) = \omega_0^2(1 + xL_N^{-1})$, амплитуда осцилляций электрона $r_E(x) = 2(\omega_0 L_N/c)^{1/6}(eE(0)/m_e\omega_0)Ai(-\xi)$, где $E(0)$ – амплитуда накачки в вакууме, c – скорость света, e и m_e – заряд и масса электрона, Ai – функция Эйри, $\xi = -xL_E^{-1}$, $L_E = (c^2L_N/\omega_0^2)^{1/3}$. Вектор напряженности электрического поля волны накачки ориентирован вдоль оси y.

Из решения уравнения (I) $k_x^2(x) = k_\pm^2 \equiv k_\perp^2\left[p(x) \pm \sqrt{p^2(x) - q(x)}\right]$ следует, что в точках, где $p^2(x) = q(x)$, функция $k_x^2(x)$ ветвится. Поэтому в окрестности таких точек возможна взаимная трансформация волн $k_+(x)$ и $k_-(x)$, вследствие чего возмущения могут быть заперты в конечной области профиля плотности.

Имея в виду малость области локализации неустойчивости, используем аппроксимацию (ср. /I/) $r_E^2(x) = r_E^2(m)\left[1 - \xi_m(\xi - \xi_m)^2\right]$, где $r_E(m) = 2(\omega_0 L_N/c)^{1/6}(eE(0)/m_e\omega_0)Ai(-\xi_m)$, ξ_m – координата m-го экстремума функции Эйри. Тогда для точек ветвления имеем:

$$\xi_b^{(\pm)} - \xi_m = \pm\Delta\xi_b \equiv \pm\sqrt{2\xi_m}\left[1 + 64\omega^6\omega_{Li}^{-4}(m)\omega_0^{-2}(k_y r_E(m))^{-4}\right]^{1/2},$$

где $\omega_{Li}^2(m) \equiv \omega_{Li}^2(\xi_m)$.

Для анализа инкремента неустойчивости используем квазиклассическое дисперсионное уравнение

$$\int_{\xi_b^{(-)}}^{\xi_b^{(+)}} d\xi L_E\left[k_+(x) - k_-(x)\right] = (2n + 1)\pi, \qquad (2)$$

которое отвечает локализации возмущений вследствие их взаимной трансформации в точках ветвления. Согласно работе /2/ использование уравнения (2) возможно в случае двусвязности внешней области точек ветвления, что ниже будет проверено.

Из уравнения (2) находим, что

$$\omega = e_r\Omega(1-\delta),\quad \Omega = (1/2)(\omega_{Li}^2(m)\omega_o)^{1/3}(k_y r_E(m))^{2/3}, \tag{3}$$

$$\delta = \frac{(2n+1)\sqrt{8\xi_m k_\perp}}{k_y^2 L_E}\times$$

$$\times\left\{\frac{r_D^4\Omega^4 e_r^4}{r_E^4(m)\omega_{Li}^4(m)}\left[3k_\perp^2 r_D^2 - \xi_m\frac{L_E}{L_N} + \frac{1}{12}\frac{k_y^2 r_E^2(m)\omega_{Li}^2(m)}{k_\perp^2 r_D^2\Omega^2}e_r^{-2}\right]\right\}^{1/2},$$

где $e_r = \exp(i\varphi_r)$, $\varphi_r = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}\pi r$, $r = 0,1,2,3,4,5$. Нарастание возмущений со временем согласно формуле (3) имеет место при $r = 0,1,2$, поскольку для таких решений $\mathrm{Im}\,\omega \equiv \gamma > 0$. При этом максимальное значение γ реализуется при $r = 1$, когда $e_1 = i$.

Условие малости области локализации $\Delta x_b(m) \equiv 2\mathrm{Re}\Delta\xi_b L_E = 12\mathrm{Re}\sqrt{\delta}\xi_m^{-1/2}L_E$ по сравнению с $\xi_m^{-1/2}L_E$ требует малости $|\delta|$ по сравнению с единицей.

Выявим условие двусвязности внешней области точек ветвления. Для этого используем явный вид разности $k_+(x) - k_-(x)$, учитывающий формулу (3) и малость области локализации:

$$(k_+(x) - k_-(x))^2 = 24\xi_m k_\perp^2 P_r^2\sqrt{P_r^2 + Q_r^2}\left[\Delta\xi_b^2 - (\xi - \xi_m)^2\right]\exp(-2i\psi), \tag{4}$$

где $\psi = (\varphi/2) + 2\varphi_r$, $\sin\varphi = -P_r(P_r^2 + Q_r^2)^{-1/2}$, $\cos\varphi = Q_r(P_r^2 + Q_r^2)^{-1/2}$, $P_r = (1/12)k_y^2 r_E^2(m)\omega_{Li}^2(m)(k_\perp r_D\Omega)^{-2}\sin 2\varphi_r$, $Q_r = 3k_\perp^2 r_D^2 - \xi_m L_E L_N^{-1} + (1/12)k_y^2 r_E^2(m)\omega_{Li}^2(m)(k_\perp r_D\Omega)^{-2}\cos 2\varphi_r$. Из формулы (4) следует, что в η-плоскости, где $\eta = (\xi - \xi_m)e^{-i\psi}$, линии Стокса, исходящие из точек ветвления, располагаются подобно линиям Стокса гармонического осциллятора, т.е. при $|\eta| \to \infty$ эти линии приближаются к биссектрисам углов системы координат на η-плоскости. Расположение линий Стокса в ξ-плоскости можно получить поворотом η-плоскости на угол ψ. Отсюда получаем, что внешняя область точек ветвления будет двусвязной, если $\psi = s\pi + \delta\psi$, где s – целое, а $|\delta\psi| < (\pi/4)$.

Полученное условие $|\delta_{\varphi}| < \pi/4$ накладывает ограничения на те значения волнового вектора, которые могут возбуждаться при данной величине амплитуды поля волны накачки. Так, при $r = 1$, т.е. с максимальным инкрементом, нарастают возмущения, для которых

$$3k_{\perp}^2 r_D^2 > \xi_m L_E L_N^{-1} + (1/12) k_y^2 r_E^2(m) \omega_{Li}^2(m) (k_{\perp} r_D \Omega)^{-2}.$$

В случаях, когда $r = 0,2$, область возможных волновых векторов ограничена неравенствами

$$\frac{1}{12\sqrt{3}} \frac{k_y^2 r_E^2(m) \omega_{Li}^2(m)}{k_{\perp}^2 r_D^2 \Omega^2} >$$

$$> \left| 3k_{\perp}^2 r_D^2 - \xi_m \frac{L_E}{L_N} \pm \frac{1}{24} \frac{k_y^2 r_E^2(m) \omega_{Li}^2(m)}{k_{\perp}^2 r_D^2 \Omega^2} \right| > \frac{1}{24} \frac{k_y^2 r_E^2(m) \omega_{Li}^2(m)}{k_{\perp}^2 r_D^2 \Omega^2} \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{12},$$

где знак "плюс" берется при $r = 0$, а знак "минус" при $r = 2$.

Поскольку решение (3) получено в предположении, что $|\omega| \gg \omega_{Li} k_{\perp} k_D$, то развитая здесь теория справедлива для волновых чисел таких, что $k_{\perp} r_D k_{\perp}^2 k_y^{-2} \ll r_E^2(m) r_D^{-2} \omega_0 \omega_{Li}^{-1}(m)$. Из этого неравенства, в частности, следует, что инкремент рассматриваемой здесь неустойчивости ограничен сверху значением $\gamma_* = (1/2)\omega_0 \times r_E^2(m) r_D^{-2}$. Поскольку рассматриваемая здесь теория справедлива, когда энергия волны накачки не превосходит тепловой энергии плазмы, т.е. $r_E^2(m) \ll r_D^2$, то $\gamma \ll \gamma_* \ll \omega_0$.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что в условиях сильной связи волны накачки с неоднородной плазмой возможно развитие абсолютной параметрической неустойчивости. Физическая картина такой неустойчивости связана с локализацией плазменных возмущений в областях экстремумов амплитуды напряженности электрического поля волны накачки.

Поступила в редакцию
28 января 1977 г.

Литература

1. В. П. Силин, А. Н. Стародуб, Физика плазмы, **3**, № 2 (1977).
2. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ДАН СССР, **152**, 28 (1963).